PROBLEMAS PROPUESTOS

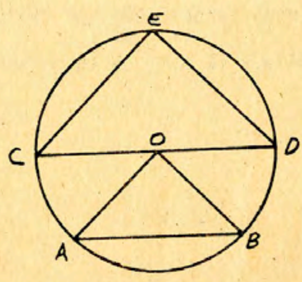
La mejor solución de cualquiera de estos problemas será publicada en el próximo número con el nombre de su autor. También se publicará la lista de los nombres de aquellos que hayan encontrado soluciones.

Los problemas marcados con un asterisco pueden ser resueltos por estudiantes del nivel secundario.

*1. Determinar los valores de p y q para que $x^2 + 2x + 5$ sea un factor de $x^4 + px^2 + q$.

*2. Un profesor llega al aula y dice: ¡Buenos días mis 21 alumnos! Un estudiante responde y dice: nosotros somos 21, nosotros, más la mitad de nosotros, más el doble de nosotros, menos la mitad del triplo de nosotros, más usted, somos 21. ¿Cuántos alumnos hay en el aula según la información del estudiante?

*3. En la figura $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$ son cuerdas congruentes en la circunferencia con centro O y radio r. La medida del arco AB es 90°. Hallar la razón de las áreas de los triángulos CED y AOB.



4. Demostrar:

$$\text{Arc tan}\ \frac{1 - x}{1 + x} \quad \text{Arc tan}\ \frac{1 - y}{1 + y} = \text{Arc sen}\ \frac{y - x}{1+x^2 \quad 1+y^2}$$

Especifique las restricciones para las variables x,y.

5. Determinar la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasando por el punto (2,1) cortan al eje de las abscisas en dos puntos que distan 2 unidades uno del otro.

6. a) Un ciclista corre a la velocidad v sobre una carretera. En una curva él hace un giro de radio r. Expresar la fuerza centrípeta a la cual el ciclista es sometido. Se representará el conjunto ciclista-bicicleta por un punto material de peso mg situado en el centro de gravedad G.

b) m vale 100 Kg. y R = 10 m es el radio medio de la carretera que tiene un ancho de l = 5m. ¿A qué velocidad máxima el ciclista puede tomar la curva sin resbalar si los rozamientos entre el suelo y las ruedas pueden ejercer una fuerza tangente al suelo de 200 Newtons? ¿En qué se transforma ésta velocidad máxima si la lluvia vuelve el suelo más resbaladizo?

c) El plano de la curva se va a inclinar un ángulo   para que el ciclista no resbale cuando corre en el medio de la carretera a 11.4 km por hora, incluso si el suelo es perfectamente resbaladizo. Si la fuerza de fricción debido al suelo rugoso tiene el mismo valor que en b), ¿entre cuáles límites de velocidad puede el ciclista tomar la curva sin riesgo de resbalar? ¿Sobre cuáles partes de la carretera esas velocidades son posibles?

Se tomará $g = 10\ m.s^{-2}$ y $tg\,\alpha = sen\,\alpha$, $cos\,\alpha = 1$

7) Entre dos anillos circulares situados en planos paralelos, cuyos centros se hallan en una perpendicular a esos planos, se extiende una película de jabón. Considerando la tensión superficial como una fuerza tangencial constante T por unidad de longitud en cualquier trayectoria en la superficie y despreciando el peso de la película, hallar su forma geométrica.

*8 Si se funden 20 Kg. de estaño con 60 de cobre, ¿cuánto por ciento de la mezcla es estaño y cuánto es cobre? ¿Cuánto por ciento del peso del estaño es el del cobre?

*9. ¿Cuántos litros de agua deben agregarse a 32 litros de alcohol de 95% de concentración para reducir la dilución a una cuya concentración sea de 75%?

SOLUCIONES A PROBLEMAS PROPUESTOS

La siguiente solución fue presentada por el estudiante Federico Velázquez Miller, matrícula 75-1508. (Problema 4, Año 1, Número 1, Abril 1978).

Sabemos que $\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$, por tanto:

i) $\operatorname{sen}(y + \pi/4) = \operatorname{sen} y\,(1/\sqrt{2}) + \cos y\,(1/\sqrt{2})$

$$\rightarrow \operatorname{sen} y + \cos y = 2 \operatorname{sen}(y + \pi/4)$$

ii) $\operatorname{sen}(y - \pi/4) = \operatorname{sen} y\,(1/\sqrt{2}) - \cos y(1/\sqrt{2})$

$$\rightarrow \operatorname{sen} y - \cos y = 2 \operatorname{sen}(y - \pi/4).$$

iii) Sustituyendo en la ecuación original tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} y - \cos y}{\operatorname{sen} y + \cos y} = \frac{\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(y - \pi/4)}{\sqrt{2}\,\operatorname{sen}(y + \pi/4)} = \frac{\operatorname{sen}(y - \pi/4)}{\operatorname{sen}(y + \pi/4)}$$

pero sabemos que $\operatorname{sen} A = \cos(A - \pi/2)$

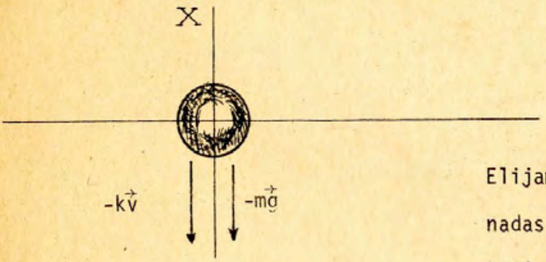
$$\rightarrow \operatorname{sen}(y + \pi/4) = \cos(y - \pi/4).$$

iv) Sustituyendo de nuevo:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen}(y - \pi/4)}{\cos(y - \pi/4)} = \tan(y - \pi/4)$$

$$y = x + \pi/4.$$

El estudiante Federico Velázquez Miller, matrícula 75-1508 presentó la siguiente solución al problema 8, Año 1, Número 1, Abril 1978.



Elijamos como centro de los ejes de coordenadas el punto donde el objeto es lanzado hacia arriba, entonces las condiciones iniciales son $x_0 = 0$ y $v_0 = v_0$.

Por tanto, $F = -kv - mg$

ó $$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt} - mg.$$

Sea $\lambda = \frac{k}{m}$, entonces, $$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + g = 0.$$

Tenemos una ecuación diferencial de segundo orden, resolvámosla por el método de Laplace:

$$\left[S^2 L\{x\} - S x_0 - \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} \right] + \lambda \left[S L\{x\} - x_0 \right] + g/s = 0$$

Aplicando el sistema de fracciones parciales, tenemos:

$$L\{x\} = \frac{v_0}{\lambda}\left[\frac{1}{S} - \frac{1}{S+\lambda}\right] - \frac{g}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda S} + \frac{1}{S^2} + \frac{1}{\lambda(S+\lambda)}\right]$$

de donde,

$$(1)\quad x = \frac{v_0}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] - \frac{g}{\lambda}\left[-\frac{1}{\lambda} + t + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]$$

por lo tanto, si derivamos con respecto a t obtenemos la velocidad instantánea:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\lambda t} - \frac{g}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]$$

Se pide hallar la altura máxima y el tiempo en que se llega a esa altura; para ello hacemos la velocidad instantánea igual a cero, pues en la máxima altura el cuerpo se detiene.

Entonces,

$$\frac{dx}{dt} = 0 = v_0\, e^{-\lambda t} - \frac{g}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t} \right]$$

despejando a t se obtiene el tiempo buscado

$$(2) \quad t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\frac{\lambda\, v_0}{g} + 1} \qquad \text{(Respuesta (b)).}$$

Sustituyendo el tiempo obtenido en la ecuación (2) hallamos la máxima altura con la ecuación (1).

Entonces,

$$x = \frac{v_0}{\lambda}\left[1 - \frac{1}{\frac{\lambda v_0}{g} + 1} \right] - \frac{g}{\lambda}\left[t + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\frac{\lambda v_0}{g} + 1} \right) - \frac{1}{\lambda} \right] \text{(Respuesta (a)).}$$