SITUACION DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA FRENTE A LAS NUEVAS TENDENCIAS DE LA EDUCACION MATEMATICA

Por L. A. Santaló

1. EL PROBLEMA

Cuando se trata de establecer nuevos curricula para la enseñanza media, aparece siempre el problema de la Geometría. A nivel elemental, el problema no aparece, pues en general hay asentimiento en que debe ser una geometría intuitiva o geometría física, más o menos extendida, pero cuyos contenidos son prácticamente aceptados por unanimidad, puede haber cambios en la metodología y la didactica, pero muy pocos en los contenidos.

Al nivel terciario, tampoco el problema es grave. Como a este nivel ya se ha dividido la población estudiantil en especialidades, cada una de ellas tiene su geometría. En general, la geometría en coordenadas es la base común a todas las especialidades. Para los estudiantes de la licenciatura en Ciencias Matemáticas o para los futuros Profesores de Enseñanza Media, el tratamiento de la geometría a partir de los espacios vectoriales y el algebra lineal, no ofrece problemas. Este estudio se suele completar, además, con algún curso o seminario sobre Fundamentos de la Geometría, siguiendo los clásicos "Fundamentos" de D. Hilbert (8), el programa de Erlangen de F. Klein (10) o algún tratamiento más moderno como el de F. Bachmann (1) o L. M. Blumenthal (2), o los excelentes y bien conocilibros de G. Choquet (4) o J. Dieudonné (5).

Pero respecto de los contenidos y metodología de la geometría en la enseñanza secundaria, sobre todo en el primer ciclo, entre las edades de 12 y 16 años, no se consiguen criterios que logren un consenso medianamente general. En las "Nuevas tendencias en la Enseñanza de la Matemática, Vol. III, publicado por la UNESCO en 1972, se dice "La concepción moderna de la enseñanza de la geometría sigue sujeta a nuevas investigaciones pedagógicas y el establecimiento de un programa aceptable para ella es actualmente uno de los problemas curriculares más difíciles". Transcurridos 7 años. la situación sigue más o menos la misma.

2. LAS CAUSAS:

El problema ha hecho crisis en la geometría, por ser donde presenta las caracteristicas más agudas, pero la esencia del mismo se encuentra en todas las ramas de la matematica.

Se trata de una confusión, difícil de clarificar, entre la matemática como creación superior, como materia de investigación entre matemáticos profesionales, para la cual hay que buscar y exigir una total coherencia, sistematización y rigor, y la matemática como disciplina formativa e informativa, que debe ser enseñada a alumnos de una edad variable entre 12 y 16 años, que tienen vocaciones distintas y capacidades de comprensión y raciocinio limitadas por su edad y condicionadas por su vocación.

Se ha pretendido que las exigencias de rigor y coherencia se mantuvieran en igual grado para cualquier edad y cualquier alumno, lo que no es posible. Los alumnos de enseñanza media son muy variables y hay que buscar un denominador común que sea útil y comprensible para la mayoría, sin perjuicio de que, cuando sea posible individualizar la enseñanza, se vayan develando a los alumnos de mayor temperamento matemático las falancias de algunas definiciones y las posibles críticas a algunos axiomas adoptados.

Se han confundido obras de investigación, a veces de innegable valor matemático, escritas para matemáticos y a veces tan solo comprensibles por ellos en su verdadero significado, a pesar de llamarse "elementales" y no suponer conocimientos previos, con libros de textos para "aprender" matemática, destinados a alumnos que quieren iniciarse en la matemática.

Es muy común el error de creer que los "fundamentos" de una ciencia, por el hecho de partir de cero, son la parte más fácil y simple de la misma, y que deben ser el punto de partida para su estudio. La realidad no es así, la fundamentación suele ser la parte más difícil de una ciencia, y, en general, ha sido siempre hecha por especialistas de larga experiencia y no ha tomado forma hasta etapas muy avanzadas de la teoría. Para poder descender el estudio de los fundamentos a los primeros niveles de la enseñanza hace falta adaptar los mismos a la capacidad de aprendizaje juvenil, adaptación siempre difícil, y en el caso de la geometría prácticamente imposible de realizar.

El problema viene de antiguo. Los Elementos de Euclides estuvieron dirigidos a especialistas, los únicos que podían entender la genialidad de su sistema axiomático. A la gran mayoría, incluídos científicos y aun matemáticos no demasiado abstractos, interesaban, más que la construcción de Euclides, teoremas como los de Thales o de Pitágoras, los poliedros de Platón, la trigonometría de Ptolomeo o las cónicas de Apolonio.

Sin embargo, encandilados por la aparente sencilles de los Elementos, los matemáticos de los siglos que siguieron los tomaron como texto para aprender geometría. El resultado fue qué, salvo excepciones de precoces genialidades, la mayoría aprendía de memoria el "pons asinorum" y se quedaba sin comprender la necesidad de las elaboradas complicaciones para demostrar teoremas que eran para ellos evidentes de entrada. El eximio prurito de Euclides de no salirse de los 5 postulados y aun de retrasar el uso del quinto de ellos lo más posible, aunque ello le obligara a complicar y alargar las demostración, es admirable creación de un genio y motivo de placer mostraciones, es admirable creación de un genio y motivo de placer y admiración para los temperamentos matemáticos. Pero en la enseñanza, dirigida a alumnos normales y a formar individuos de una sociedad heterogénea, en que el genio y aun el matemático profesional es excepción, hacen falta textos normales y didácticos adaptadas a la mayoría.

Es una experiencia universal que los textos "malos" se venden más que los "buenos". Ello es una lamentable, pero lógica consecuencia de confundir "bondad" con exquisitez o preciosismo. El secreto está en buscar libros buenos para la edad de los alumnos a los alumnos a los que van dirigidos y para los fines de la enseñanza, no libros buenos para los matemáticos investigadores que los miran a travez de la lupa de sus muchos conocimientos. En este caso, cabe juzgarlos como trabajo de investigación, no como obra de texto.

Lo mismo sucedió, 23 siglos más tarde, con los "Grundlagen" de Hilbert, obra magistral, llena de ideas que dieron lugar a numerosos trabajos de investigación, para aclarar y discutir las muchas geometrias posibles en base a la elección, añadidos y supresión de algunos postulados. También en este caso, se quiso adaptar la obra la enseñanza secundaria y ·aparecieron textos con postulados a lo Hilbert formando mescolanzas pesadas e indigestas, sin utilidad y sin rigor, pues al recortar la obra de Hiibert se destruía toda su magistral concepción. Nuevamente se confundió la investigación con la didáctica. La palabra "fundamentos", como la palabra "elementos" en el caso de Euclides, hizo creer que lo superior era elemental y que las ideas dirigidas a matemáticos profesionales podrían ser transferidos, con algunos recortes al voleo, a los centros de enseñanza secundaria. El resultado fue una geometría en cuya pseudofundamentación se perdía tiempo y se confundía a los alumnos. Pero, por lo menos,se conservaron algunos teoremas y propiedades y algunos razonamientos y deducciones "locales" que mantenían el interés y educaban en el juego del quehacer matemático.

3. LA REVOLUCION DE LOS AÑOS 60.

Cuando se extendió por el mundo la entonces llamada matemática moderna, alrededor de 1960, se quisieron introducir en la enseñanza secundaria cuestiones que habían resultado extraordinariamente útiles al nivel terciario. Fue una necesidad evidentemente y, en
mente útiles al nivel terciario. Fue una necesidad evidente, y,en promedio, se puede decir que la reforma fue un éxito en todas partes. Se introdujeron ideas y metodologías básicas que prepararon a los alumnos mucho mejor que antes, para poder enfrentar las novedades científicas y tecnológicas que desde los claustros universitarios fueron descendiendo a las escuelas secundarias.

En toda la parte algebraica, la reforma anduvo bien y si hubo pequeños abusos, ellos fueron fácilmente subsanables. Pero en la geometría volvió a ocurrir el fenómeno tradicional. Se intentó hacer el imposible de una construcción rigurosa e impecable de la geometría sin salirse del nivel elemental ni de la capacidad de aprendizaje de los alumnos y, como esto resulta imposible, se optó, drásticamente, para suprimir la geometría o trasladarla al algebra, lineal, con pérdida total de sus carácterísticas de belleza y armonía propias, que la habían ido adornando desde la antigüedad.

4. ALGUNOS EJEMPLOS:

Para poner el fenómeno de manifiesto, vamos a aclararlo con algunos ejemplos.

a) La línea recta. Desde Euclides se intentó "definir" la línea recta. Las definiciones resultaron siempre inaceptables y se optó por considerar la idea de recta como una "idea primitiva", que los alumnos tienen intuitivamente desde la infancia y con la cual no se equivocan nunca al utilizarla.

Por suerte, esta posición ha prevalecido con bastante generalidad en la enseñanza media, pero siempre con cierto desagrado de los profesores o autores de programas, que lo han considerado como un defecto que había que ocultar o subsanar, procurando de alguna manera introducir en la enseñanza media algunos de los caminos que se utilizaban en la universidad (en ella, con plena razón), por ejemplo: a) Seguir a Hilbert y decir que "existen elementos llamados rectas", o bien, para seguir la ortodoxia conjuntista "un plano es un conjunto provisto de una estructura dada por un conjunto de partes del mismo, llamadas rectas" (Choquet (4)). b) Esperar hasta que se estudien los espacios vectoriales sobre los reales y entonces definir las rectas como las variedades lineales cuya dirección es una recta vectorial" (Dieudonné) (5).

Para evitar los espacios vectoriales se han dado otras definiciones, por ejemplo la siguiente, que dió lugar a muchas discusiones en las escuelas francesas alrededor de 1970 "Se llama recta a un conjunto D de elementos, llamados puntos, provistos de una biyección g de D sobre los reales R y de todas las biyecciones f que se deducen de g de la siguiente manera: cualquiera que sea el número real a, se tiene, o bien $f(M)=g(M)+a$, o bien $f(M)=-g(M)+a$ (M es un punto arbitrario de la recta). La familia de biyecciones se llama una estructura euclidiana".

Nuestra pregunta es: al nivel de la escuela media, cualquiera de estas definiciones ¿sirven para aclarar en el alumno la idea que ya tiene de recta? ¿le enseñan a razonar? Pensemos en alumnos en pleno desarrollo intelectual, ávidos de novedades y deseosos de entender el mundo y aun los mecanismos del razonamiento lógico, pero sin formación previa para comprender las sutilezas de los matemáticos formados.

b) Definición de ángulo. Un grave problema que ha atemorizado a los profesores de matemática de enseñanza secundaria y a los responsables de sus curricula ha sido la noción de ángulo. Se señalan, esencialmente, dos dificultades.

i)Supongamos ángulos menores de 300. Si se quiere ser consecuente con la opción conjuntista de la enseñanza, hay que definirlos como intersección de semiplanos. Pero cuando aparece el producto escala de vectores y la trigonometría, es necesario definir una orientación, y entonces se pasa a la definición de ángulo como par ordenado de semirectas. Es necesario, entonces, o bien dejar ambigua la situación y no escarbar en la diferencia (lo cual es malo) o bien dar nombres diferentes a las dos cosas. En general se llaman "ángulos sectoriales" o "sectores angulares" a los primeros y "ángulos orientados" o simplemente "ángulos" a los segundos (ver, por ejemplo. W. Servais (1) o Dieudonne (5, pág. 81). Esto es, lógica y matemáticamente correctísimo, pero ¿no hará que el alumno cada vez que se encuentre con un ángulo (ángulo de dos rutas en un mapa, ángulo de las manecillas del reloj, ángulo en una figura o dibujo geométrico, el ángulo visual o de incidencia y reflexión de los que le habla el profesor de física) sienta la duda de si se trata de un ángulo orientado o de un ángulo sectorial? Con esta distinción, nacida del prurito de no salirse de la ortodoxia conjuntista. ¿se habrá aclarado en la mente del alumno la idea que el necesita de ángulo para su vida en la calle y para la comprensión de las demás disciplinas científicas de la escuela y aún de la misma matemáticas ¿Se le habrá enseñado a razonar mejor?

ii) Más grave es la segunda dificultad, referente a la "medida" de ángulos. Es evidente que desde el punto de vista geométrico puro, dibujado un ángulo, si no se dice nada más, es importante asignarle una medida superior a 360. Como dice Dieudonné (54 pág. 19) una recta no puede recordar si ha dado varias vueltas al tener una determinada posición. Por tanto, los ángulos deben medirse" módulo 360^{o}. En consecuencia, hay que aceptar afirmaciones como "la suma de los ángulos interiores de un cuadrado es nula" y la más general de Papy (13, pág. 314) "La suma de los ángulos interiores de un polígiono ordenado es igual a cero, si el número de lados es par, e igual a a 180 si el número de lados es impar"

Todo esto es correcto y posiblemente necesario desde el punto de vista puramente geométrico y aún algebraico (Dieudonné (5), pág. 102)). La noción precisa de ángulo y su medida va ligada a la función exponencial compleja y a su superficie de Riemann de infinitas hojas. Todo ello el profesor lo debe saber pero también debe saberlo callar cuando se dirige a los alumnos de la escuela secundaria. El alumno sabe muy bien que los lados de un ángulo no tienen memoria, pero entiende también muy bien que uno de ellos puede haber dado muchas vueltas y que estas pueden darse por múltiplos enteros de 360^{o}. Así procede el profesor de física y así se actua en la vida común. Decir al alumno que lo mismo vale la suma de los angulos interiores de un triángulo que los de un pentágono, no creemos que ayude mucho a aclarar sus ideas ni su modo de razonar. A lo sumo lo entenderá y lo tomará como un juego que repetirá en los exámenes, pero que estará bien seguro de no aplicar jamás, si tiene alguna vez que sumar los ángulo del polígono que delimita un campo o una habitación de su casa.

En la escuela media, la matemática no puede formar un compartimiento estanco, aislado del mundo, como una torre en la que sólo caben elucubraciones para exquisitos. Al alumno le interesa más aprender cosas para la vida y agilizar su razonamiento para resolver situaciones reales que se le pueden presentar o que pueden entender dentro de la matemática, que no finas sutilezas, obligadas por el empeño de no salirse de una determinada opción y hacer una ordenación lineal perfecta. de toda la geometría. Las reglas "de los tres dedos" o "del sacacorchos"" para definir una orientación en el espacio, no son matemáticas. pero enseñan mucha matemática y sirven para adelantar conceptos que dentro de la matemática pura aparecen mucho más adelante, de manera sofisticada y que no hay que peretender que estén al alcance de la mayoría de los alumnos, que no van a ser matemáticos profesionales.

Estas dificultades en la definición de ángulo, importantes a un nivel superior, han hecho que al programar curricula de enseñanza media se procediera con temor. En la mayoría de los textos se procura no mencionar ángulos superiores de 360° y aun de aislar toda mención de los ángulos bajo un cinturón de seguridad. Como dice Choquet (4):. . . observemos que hemos podido construir cómodamente gran parte de la geometría sin hablar nunca de ángulos" y Dieudonné (5, pág. 19) "Se verá en este libro que todo lo que pertenece propiamente a la geometría euclidiana del plano, desde el punto de vista algebraïco es enteramente independiente de toda "medida" de ángulos por números reales. Magníficos tours de force que han de ser, seguramente, admiración y deleite de matemáticos entendidos, pero que difícilmente tengan valor pedagógico al nivel que estamos considerando. Es como el caso de Euclides, que en sus Elementos retrasó lo más posible el uso de su quinto postulado, dando ejemplo de profunda sagacidad matemática, pero el hecho fue de poca importancia, más bien perjudicó, a quienes querían iniciarse en el estudio de la geometría.

c) Area del triángulo esférico. El concepto de área de una superficie (no desarrollable) solamente se puede definir con rigor cuando se dispone de los conocimientos del cálculo avanzado. Lo mostraron bien los matemáticos de fines del siglo pasado, principalmente H. Lebesque en su fundamental memoria de 1902 (11).

Se trata de estudios profundos, que el profesor de matemáticas debe conocer, pero que pueden y deben ignorarse al nivel secundario por ser difícil, o imposible, que sean comprendidos a esa edad. Si las dificultades para definir el área de una superficie pasaron inadvertidas durante más de 20 siglos a los matemáticos más ilustres, es difícil, que puedan ser comprendidas por los alumnos de escuela media. Sin embargo, ellas han ahuyentado de sus curricula algunos tópicos sobre geometría de la esfera, que antes se daban y que son importantes tanto desde el punto de vista formativo como informativo del alumno.

Por ejemplo, el valor del área del triángulo esférico, ha desaparecido de la mayoría de los programas. No cabe dentro del algebra lineal y la definición precisa de área es difícil, por tanto hay que suprimir el tema. Sin embargo se trata de un resultado bien simple, de demostración ingeniosa y casi trivial, que enseña a razonar sobre la esfera como primer ejemplo de espacio no plano, que atrae la atención del alumno por su inesperada sencillez y que le hace ver que no toda la matemática es lineal. El hecho de que el área quede determinada por la suma de los ángulos y que, por tanto, sobre la esfera no pueda hablarse de semejanza, es sumamente instructivo y es el mejor camino para que el alumno vislumbre la posibilidad de una geometría no euclidiana, tema sobre el cual, culturalmente al menos, es necesario que al alumno reciba un mínimo de información.

d) El teorema de Euler sobre los poliedros. Con el prejuicio de pensar siempre en mantener un rigor a ultranza y una consecuencia inflexible con la teoría conjuntista, la definición de poliedro o de superficie poliédrica en el espacio, tropieza con dificultades. El desarrollo de la topología algebraica las puso de manifiesto.

Estas dificultades, claras e inevitables a nivel superior, repercutieron desfavorablemente al nivel secundario. Como no se podían evitar, se optó por suprimir toda la geometría del espacio, o reducirla a sus primeras propiedades afines, que son las más obvias y menos interesantes. Ha desaparecido de los programas, por ejemplo, el teorema de Euler sobre los poliedros, que en los casos comunes es de demostración elemental y tanto interés tiene desde los puntos de vista estético, cultural y utilitario. Su vinculación con la conexión de los poliedros y por ser el primer ejemplo de invariante topológico, justifican su introducción en los programas desde el punto de vista estrictamente matemático, y su uso en la teoría de grafos lo justifica desde el punto de vista utilitario. Sin embargo ha sido prácticamente excluido de todos los programas por el temor de que en la definición de poliedro (concepto que es evidente al alumno) se escape alguna falla que, nuevamente, aparezca bajo la lupa inquisitoria del matemático profesional.

Algo análogo ha ocurrido con los poliedros regulares, una de las adquisiciones más hermosa de la matemática griega, cuyo estudio aparece actualmente trasladado al nivel superior, para los especialistas o estudiantes de los grupos finitos de rotaciones en el espacio. Esto, como diría F. Klein, ayuda a la comprensión "desde un punto de vista superior" y debe ser conocido por el profesor, pero el punto de vista superior debe ser centro de proyección sobre otros niveles, donde se encuentran los alumnos de enseñanza secundaria que no pueden elevarse a tales alturas, pero que no por ello deben dejarse en la ignorancia de teoremas culturalmente básicos.

d) Geometría afín y geometría métrica. No hay duda de que pensando en la matemática como una construcción intelectual, edificada bajo un estricto orden de complejidad creciente, la geometría afín aparece antes que la métrica. Sus reglas son más simples y se conservan más fácilmente en las deducciones y, además, el posterior o simultáneo paso a los espacios vectoriales es más fácil. La geometría afin se algebriza linealmente.

Pero, ¿es útil aferrarse a esta ordenación para postergar y considerar como una especie de "tabú" el uso en la clase de las propiedades métricas que el alumno usa constantemente en la calle?

La mente no adquiere los conocimientos por estricto orden creciente de dificultad. Pretender seguir una ordenación perfecta en la enseñanza, es como querer iniciar la alimentación de los niños con los productos químicos más simples, para seguir el orden lógico con que se estructuran en la química. Tanto el estómago como la mente actuan a saltos, y en el caso de la enseñanza de la matemática, lo que hay que hacer es seguir el orden con el cual los conceptos se asimilan más fácilmente y el alumno practica más a gusto y con más intensidad la gimnasia de la deducción lógica, que puede ser distinto del orden con que los matemáticos ya formados han estructurado su ciencia. Es un problema en que debe pesar más la opinión de los psicólogos que la de los matemáticos.

No es evidente que la perpendicularidad, que es "local", sea más difícil de entender para el alumno, que el paralelismo, que necesita del plano infinito. El alumno entiende más la circunferencia. que puede dibujar y depende de menos parámetros, que la elipse. Es difícil, para el alumno, considerar como de una misma clase todas las figuras afinmente equivalentes. La congruencia, en cambio, la utiliza constantemente en su vida de relación.

Por tanto, aunque la geometría métrica es cuadrática y más difícil de axiomatizar que la geometría afín, una obsesión para mantenerse dentro de esta última para ser coherente y "consecuente", es sin duda muy interesante para matemáticos, pero cuesta creer que sea un buen método didáctico.

Hay transformaciones geométricas, como la inversión, que no son afines y que por ello han desaparecido de la escuela media, a pesar de su utilidad, aunque sólo sea para mostrar que la geometría no termina con las transformaciones lineales.

5. RESUMEN:

Con los ejemplos anteriores hemos querido exponer la opinión de que las dificultades en la enseñanza de la geometría al nivel secundario, que han motivado la supresión casi total de la misma, provienen del prurito de que la enseñanza tenga una estructura lineal, con bases impecablemente sentadas, a partir de las cuales todo se desarrolla lógicamente, sin posibilidades de salirse de la línea general elegida. La construcción de la geometría de esta manera puede tener mucha importancia, y muchas veces la tiene, desde el punto de vista académico, pero no está tan claro que sea igualmente importante desde el punto de vista del aprendizaje. Entre las edades de 12 a 16 años el alumno debe aprender muchas cosas, y no es malo que conozca distintos métodos y distintos puntos de partida. No hay que polarizarse en ninguna opción. En cualquiera de ellas se puede aprender a razonar y a ejercitar la deducción lógica. La complicación excesiva para no salirse de un camino prefijado dudamos de que sea pedagógicamente recomendable, sin discutir su valor matemático, que puede ser grande.

6. FRASES MODERNAS.

Sin pretender involucrar a los autores en las opiniones anteriores, pero por tener cierta vinculación con ellas, vamos a citar unas frases de dos ilustres matemáticos franceses, René Thom, crítico de la llamada matemática moderna, y Jean Dieudonné, ferviente partidario de la misma y uno de sus principales propulsores, y de un prestigioso especialista alemán en didáctica de la matemática, Arnold Kirsch, quien tuvo a su cargo una de las conferencias principales en el Congreso de Karlsruhe en 1976.

Dice René Thom(16): Se llega al rigor absoluto, sólo eliminando significado. . . y si se debe elegir entre rigor y significado eligiré este último. Es la elección que se ha hecho en matemática, en donde casi siempre se trabaja en una situación semi-formalizada, con un metalenguaje que es el habla ordinaria, no formalizada, "La tendencia modernista representa un aumento de la cultura en detrimento de la naturaleza, es, en el estricto significado del término, una preciosura. Pero si la preciosura tiene a veces encanto en arte y en literatura, puede no tenerlo en matemática.

Dice J. Dieudonné (6): "El profesor de matemática que debe enseñar a este nivel (se refiere al secundario superior o primer año de universidad) debe frenar en lo posible sus gustos y tendencias de matemático puro, y procurar que los resultados y métodos que trata estén próximos a la realidad sensible y susceptibles de aplicaciones lo más inmediatos posible. Se puede deplorar este aspecto "utilitario pe- * ro es exigido por la composición misma de los alumnos". Y refiriéndose al Análisis, pero con palabras igualmente aplicables a la Geometría dice" Un abuso de la exiomática, es el de querer deducir de un sistema inmutable de axiomas, los teoremas más intuitivos del análisis. Para los principiantes, creo que basta limitarse a enunciar estos teoremas de la manera más precisa posible e indicar que pueden ser demostrados a partir de los axiomas de los números reales, pero sin intentar dar a estas demostraciones que, a este nivel, nada útil pueden aportar a los estudiantes.

Arnorld Kirsch, en el Congreso de Karlsruhe (1976), dijo (9):

"Estamos en contra de la tendencia, muy extendida, de desarrollar la matemática *ab ovo*, o de retroceder al principio y empezar de nuevo sin suponer nada conocido, tendencia que se encuentra no solamente en matemáticos sistematizadores (cuando, por ejemplo, dicen a sus alumnos que se olviden de todo lo que han aprendido en la escuela), sino también en didácticos de orientación genética. . . Los alumnos tienen una experiencia considerable que puede ser usada en la geometría elemental. En particular, pensamos en su familiaridad con la existencia y propiedades de las medidas de longitud ángulo y área. Esta familiaridad procede de afuera de las clases de matemática y a veces de afuera de la escuela, lo que debemos considerar como una situación particularmente afortunada. Hoy en día no se debe insistir más en querer desarrollar la geometría elemental de manera completamente rigurosa, y va entrando la costumbre de hacer uso de estas medidas sin ningún comentario sobre ellas"

7. HISTORIA ANTIGUA

Cuenta la leyenda que los pitagóricos (siglo VI antes de J. C.) al descubrir la existencia de los irracionales, se juramentaron para que tal conocimiento no trascendiera al público, bajo pena de muerte para quien lo delatara.

Una manera de interpretar la leyenda es suponer que los pitagóricos, celosos custodios de los números, creyeran que tal conocimiento, puesto en manos de los hombres comunes, que hacían sus transacciones comerciales, sus medidas topográficas y sus construcciones arquitectónicas o navieras usando tan solo números racionales, sintieran de pronto la angustia y el temor por la inexactitud de sus procedimientos y paralizaran por ello la acción.

Comprendieron que era un descubrimiento para iniciados y no intentaron exponerlo a niveles inferiores donde se cultivaba la matemática práctica de la época.

Pasaron más de 20 siglos hasta que se dieron definiciones rigurosas del número real, pero ello no impidió que la matemática progresara y llegara a los niveles a que la elevaron matemáticos como Euler, Gauss y Cauchy, para no citar más que los modernos.

Los matemáticos actuales han puesto de manifiesto muchas exquisiteces en los fundamentos de su ciencia. Ello significa un inmenso progreso. Pero hay que pensar, como los pitagóricos, que la pretensión de poner estos descubrimientos en conocimiento de los principiantes, puede perjudicarles más que ayudarles. Igual que la matemática siguió, después de haber descubierto los irracionales, aún sin haberlos definido bien, también la geometría actual, en sus niveles elementales, puede seguir saltando sus fundamentos, con la confianza de que ellos son guardados celosamente por los matemáticos profesionales, quienes se cuidarán de evitar todo desvio.

La dificultad de exponer elementalmente los fundamentos de la geometría, no puede ser motivo para que ella desaparezca o se traslade íntegramente a los espacios vectoriales. La geometría, en el sentido clásico de la palabra, construyendo si es preciso puentes que eviten sus grietas iniciales, tiene mucho que ofrecer como gimnasia razonadora y como depósito de ejemplos que ayuden a comprender el mundo, la matemática y las ciencias naturales. Contemos como ejemplo, el libro de múltiples enfoques de H. S. M. Coxeter (3) o el más específico de H. W. Guggenheimer (7), de los cuales se pueden sacar excelentes tópicos para tratar en la escuela secundaria.

BIBLIOGRAFIA

1. BACHNANN, F. Aufbau der Geometrie auf dem Spiegelungs- Springer, Berlin, 1959.
2. BLUMENTHAL, L. M. A. modern view of Geometry, W. H. Freeman and Co. San Francisco and London, 1961.
3. COXETER, H. S. M. Introduccion to Geometry, Wiley, New - York, 1961
4. CHOQUET, G. L'Enseignement de la Gèométrie, Hernann, Paris, 1967
5. DIEUDONNE, J. Algebre Lineaire et Geometrie Elementaire, Hermann, Paris, 1969.
6. " L'enseignement des mathematiques dans les classes superieures de L'ecole secondaire et ses rapports avec l'enseignement des mathe-

matiques a l'université, IV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Caracas, 1975, Volumen titulado "Educación Matemática en las Américas IV" Unesco, Montevideo, 1976, p. 39-43.

GUGGENHEIMER, H. W. Plane Geometry and its Groups, Holden Day, San Francisco, 1967.

8 HILBERT, D. Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899 Traducción Castellana "Fundamentos de la Geometria", Instituto Jorge Juan", Consejo Superior de Investigaciones Ciéntíficas Madrid, 1953.

9. KIRSCH, Arnold Aspects of simplification in Mathematics Teaching. Proceeding of the Third International Congrees on Mathematical Education, Karlsruhe, 1976, págs. 98-120.

10. KLEIN F. Vergleichande Metrachutungen uber neuere geometrische Forschungen. Erlangen, 1877. Publicado también en los Mathematische Annalen, vol. 43, 1893, p. 63-100.

11. LEBESGUE, H. Integrale, longuer, área, Annali di Mat. Pura Appl. Vol. 7, 1902, p. 231-369.

12. New Irends in Mathematics Teaching, vol. III, UNESCO, Paris, 1972. Existe traducción castellana publicada por la Oficina Regional de UNESCO para América Latina, Montevideo 1974.

13. PAPY, G. Matemática Moderna, vol. III, Traducción castellana EUDEBA Buenos Aires. 1970.

14. SERVAIS, W. L'enseignement de la mathematique diversifié dans les classes superieures des écoles secondaires, Educación Matemática en las Américas IV, p. 67-96. Oficina Regional de UNESCO para América Latina. Montevideo, 1976 (Actas de la Conferencia Interamericana de educación Matemática de Caracas, (1975).

15. " La enseñanza comprensiva y moderna de la Geometría, Conceptos de Matemática, No. 37, Buenos Aires (1976).

16. THOM, R. ¿Existe la matemática moderna? Conferencia pronunciada en el 2o. Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Matemática, Exeter, 1972. Traducido en Conceptos de Matemática, Buenos Aires, No. 31, 1974, p. 5-12.