LA INVERSA DE UNA FUNCION

Por: Lic. Dorotea Morey

Notación utilizada:

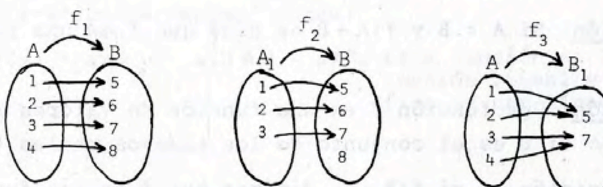
: Existe	$>$: mayor que
!: exite un único	$\geq$: mayor o igual que
ε: elemento de	$\leq$: menor o igual que
tq: tal que	$<$: menor que
/: tal que	$\neq$: distinto de
$\Longleftrightarrow$: si y sólo si	R: conjunto de los números reales

Introducción.

Cuando estudiamos funciones en cualquier curso de Matemáticas siempre es dificultoso para el estudiante interpretar gráficamente la inversa de una función. Aún comprendiéndose la definicíon analítica de ésta no se visualiza la reflexión sobre la recta $y = x$ que permite obtener el gráfico de la inversa. Antes de decir cómo se puede obtener el gráfico de la inversa de una función en un laboratorio práctico vamos a dar algunas definiciones ya conocidas para algunos de ustedes.

1. Difinición de Función: Sean A y B conjuntos. f es una función de A en B, $F:A \to B$, si y sólo si f relaciona cada elemento del conjunto A con un sólo elemento del conjunto B.

Ejemplo 1:



Nótese que en cada uno de los ejemplos dados se cumple la definición 1.

2. Definición: Sea f una función de A en B. Si un elemento x de A está relacionado bajo la función f con un elemento y de B, diremos que x está f-relacionado con y, y escribiremos xfy. Si un elemento $x \varepsilon A$, y un elemento $y \varepsilon B$ están f-relacionados entonces diremos que el par ordenado (x,y) pertenece a la función f. Por tanto:

$$(x,y) \iff xfy$$

En el ejemplo 1 : $1f_1 5$, entonces el par (1,5) pertenece a f_1.
$2f_2 6$, entonces el par (2,6) pertenece a f_2.

Ahora podemos considerar la función f como el conjunto de pares ordenados (x,y) tales que x está f-relacionado con y.

Esto es:

$$f = \{ (x,y) \mid xfy \}$$

En el ejemplo 1.

$f_1 = \{ (1,5), (2,6), (3,7), (4,8) \}$

$f_2 = \{ (1,5), (2,6), (3,7) \}$

$f_3 = \{ (1,5), (2,5), (3,7), (4,7) \}$

3. Definición: Si un elemento x, $x \varepsilon A$, está f-relacionado con un elemnto y, $y \varepsilon B$, diremos que y es la imagen de x por la función f y escribiremos $y = f(x)$. y se llama también el valor de la función en x.

4. Definición: Si A = B y $f:A \to B$ se dice que f es una función en A.

5. Definición: Una función f es una función de valores reales si y sólo si B es el conjunto de los números reales (B = R).

Por la definición 4, si $f:R \to R$, diremos que f es una función en R. En este laboratorio trabajaremos solamente con esta clase de funciones.

Las funciones en R generalmente son definidas por medio de ecuaciones en dos variables, x e y, donde x se llama la variable independiente e y se llama la variable dependiente.

Ejemplo 2:

$f: R \to R$ tq $f(x) = 2x - 1$ ó

$f: R \to R$ tq $y = 2x - 1$

Si definimos una función real por medio de una ecuación en dos variables y queremos determinar algunos pares ordenados pertenecientes a la función, tomamos valores de x y encontramos, sustituyendo en la ecuación, el valor de la función en x, esto es, la imagen y de x por la función (ver def. 3).

En el ejemplo 2:

Si $x = -1$, entonces $y = 2(-1) - 1 = -3$ y por tanto el par $(-1,-3) \varepsilon f$.

Si $x = 1$, entonces $y = 2(1) - 1 = 1$ y por tanto el par $(1,1) \varepsilon f$.

Si $x = \frac{1}{2}$, entonces $y = 2(\frac{1}{2}) - 1 = 0$ y por tanto el par $(\frac{1}{2},0) \varepsilon f$

6. Definición: El gráfico de una función en R cuyos pares ordenados son (x,y) es el conjunto de puntos del plano cartesiano rectangular cuyas coordenadas son los pares dados.

Veamos ahora algunas funciones de los reales en los reales y su gráfico correspondientes:

i) $f(x) = ax + b$ $a,b \in R$, $a \neq 0$. Esta función se llama la función lineal y su gráfico es una línea recta.

Ejemplo 3:

$f(x) = x$ En este caso particular a la función lineal se le da el nombre de función identidad ya que cada elemento x está relacionado consigo mismo.

Procedamos a determinar algunos pares ordenados de la función colocándolos en una tabla.

x	2	3/2	1	0	-1/2	-2
y	2	3/2	1	0	-1/2	-2

Dibujemos dichos pares en los ejes de coordenadas.

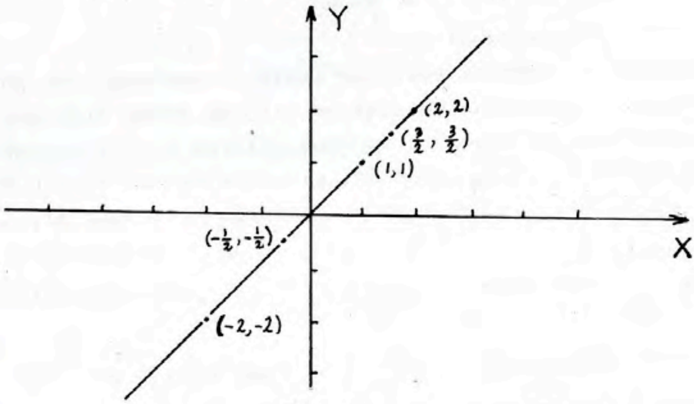


Fig. 1

Uniendo los puntos del plano correspondientes a los pares ordenados vemos que efectivamente van formando una línea recta.

Para trazar el gráfico de una función lineal basta determinar dos pares ordenados cualesquiera de ella ya que por dos puntos pasa una y sólo una línea recta.

ii) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a,b,c \in R$, $a \neq 0$. Esta función se conoce como la función cuadrática, y su gráfico es una parábola.

Esta función tiene varias propiedades, sólo nos ocuparemos de una de ellas: dependiendo del signo de "a", la función alcanza un valor mínimo o un valor máximo.

El punto más alto o más bajo del gráfico de una función cuadrática, el cual corresponde al valor mínimo o máximo de la función, tiene como coordenadas el punto: $V = (\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ y se llama el vértice de la parábola.

Verifiquemos esto. El lector puede probar que las implicaciones siguientes son verdaderas:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad a,b,c, \in R$$

Sacando factor común:

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}).$$

Asociando:

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x) + \frac{c}{a}\right].$$

Completando el cuadrado:

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Factorizando y sumando:

$$y = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Multiplicando:

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + a(\frac{4ac - b^2}{4a^2})$$

Simplificando:

$$y = \underbrace{a(x^2 + \frac{b}{2a})}_{1} + \underbrace{(\frac{4ac - b^2}{4a})}_{2}$$

Para $a,b,c \in R$ fijos, el término (2) es constante.

Como: $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$, $x \in R$, a,b,c, fijos se tiene:

i) si $a > 0$, el término (1) es positivo.

ii) si $a < 0$, el término (1) es negativo.

i) Si $a > 0$, y obtiene **su menor** valor cuando $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$, ya que si $a > 0$ y $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ entonces $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ y

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} \geq \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Luego y toma su menor valor si $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$, es decir $x = \frac{-b}{2a}$. Por tanto el punto más bajo es $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$.

ii) Si $a < 0$, y obtiene su mayor valor cuando $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$, ya que si $a < 0$ y $(x + \frac{b}{2a})^2 \leq 0$, entonces $a(x + \frac{b}{2a})^2 \leq 0$, y $a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$.

El punto más alto se obtiene cuando y toma su mayor valor.

Si $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$ obtenemos otra vez: $x = \frac{-b}{2a}$, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Por tanto el punto más alto es $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$.

Conclusión:

La función cuadrática alcanza un valor mínimo cuando $a > 0$ y el vértice de la parábola en este caso es: $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$.

La función cuadrática alcanza un valor máximo cuando $a < 0$ y el vértice de la parábola en este caso es: $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$.

Nótese que: $\frac{4ac - b^2}{4a} = f(\frac{-b}{2a})$.

Ejemplo 4:

$f(x) = 2x^2 - 8$, $a = 2$, $b = 0$, $c = -8$

1) Determinemos las coordenadas (x,y) del vértice:

Como $x = \frac{-b}{2a}$ entonces $x = \frac{0}{2(2)} = 0$.

Como $y = f(\frac{-b}{2a})$ entonces $y = f(0) = 2(0) - 8 = -8$

El vértice tiene coordenadas: $V = (0, -8)$.

2) Hagamos la tabla de valores:

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	10	0	-6	-8	-6	0	10

3) Tracemos el gráfico.
Busquemos los puntos en los ejes de coordenadas y unámos-los por una curva continua y sin saltos.

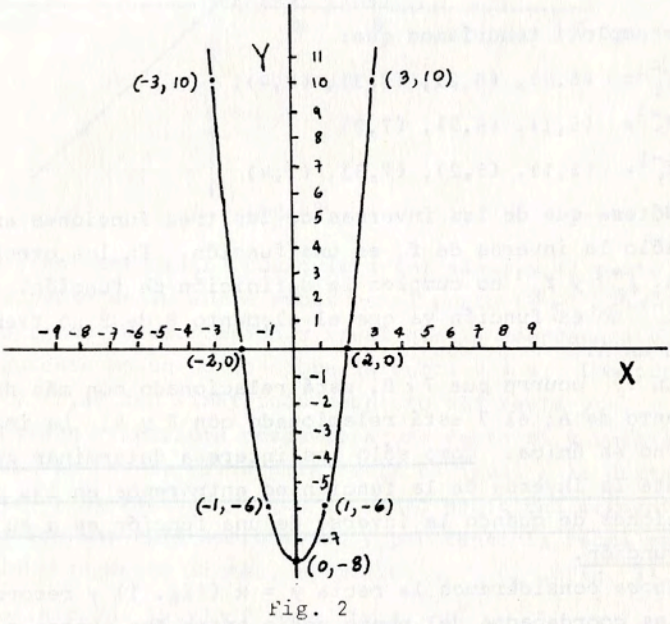


Fig. 2

iii) $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ Función exponencial (cuyo gráfico es una curva creciente o decreciente según el valor de a)(Revista Magister año 1 No1).

iv) $f(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ Función logaritmica inversa de la función Exponencial (Revista Magister año1 No.1)

7. <u>Definición de la Inversa de una Función</u>:

Sea $f:A \to B$ una función. La inversa de f relaciona un elemento y de B con algún elemento x de A si y sólo si x está f-relacionado con y.

Esto es: un par ordenado (y,x) está en la inversa de f si y sólo si el par ordenado (x,y) está en f. La inversa de f se denota f^{-1}. En símbolos podemos escribir:

$$f^{-1} = \{ (y,x) \mid (x,y) \in f \}$$

Del ejemplo 1 tendríamos que:

$f_1^{-1} = \{ (5,1), (6,2), (7,3), (8,4)\}$

$f_2^{-1} =$ (5,1), (6,2), (7,3)

$f_3^{-1} =$ (5,1), (5,2), (7,3), (7,4)

Nótese que de las inversas de las tres funciones anteriores sólo la inversa de f_1 es una función. En los otros dos casos, f_2^{-1} y f_3^{-1} no cumplen la definición de función.

f_2^{-1} no es función ya que el elemento 8 de B no tiene imagen en A.

En f_3^{-1} ocurre que $7 \in B$, está relacionado con más de <u>un</u> elemento de A; el 7 está relacionado con 3 y 4. La imagen de 7 no es única. <u>Como sólo nos interesa determinar gráficamente la inversa de la función no entraremos en las consideraciones de cuándo la inversa de una función es a su vez una función.</u>

Ahora consideremos la recta y = x (fig. 1) y recordemos que las coordenadas del punto medio entre dos puntos $p_1(x_1,y_1)$ y $p_2(x_2,y_2)$ del plano están dadas por:

$$P_m = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

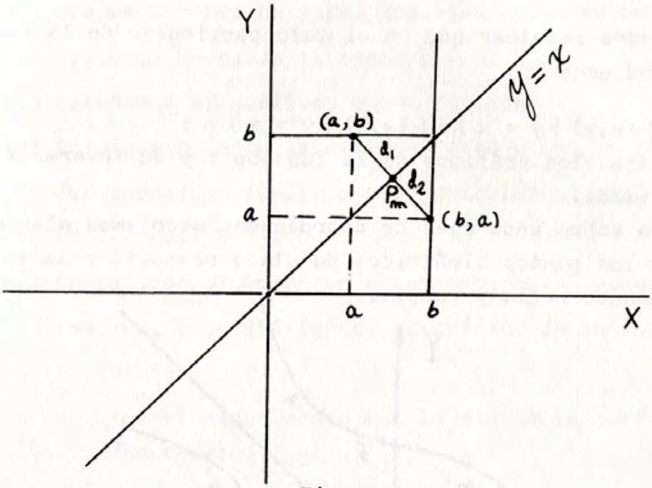


Fig. 3

Tomemos un punto (a,b) cualquiera del plano y el punto (b,a). El punto medio entre ambos es el punto $(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2})$. Este punto tiene la coordenada x igual que la coordenada y, por consiguiente es un punto sobre la recta y = x. Los puntos (a,b) y (b,a) son simétricos respecto ala recta y=x, (dos puntos son simétricos respecto a una recta si y solo si la distancia de uno de ellos a la recta es igual a la distancia del otro a la recta), ya que el punto medio del segmento lineal que los une está sobre ella, y por tanto la recta y=x bisecta dicho segmento lineal, es decir: $d_1 = d_2$.(fig. 3).

Por definición: $(x,y) \in f \iff (y,x) \in f^{-1}$.

El conjunto de puntos (x,y) del plano que representan el gráfico de f y el conjunto de puntos (y,x) que representan el gráfico de f^{-1} son simétricos respecto a la recta y = x, de donde el gráfico de f y su inversa f^{-1} son simétricos respecto a la recta y = x.

Queremos recalcar que n el caso particular de la recta $y = x$ tendremos:

$f = \{ (x,y) \mid y = x \} = \{ (y,x) \mid y = x \} = f^{-1}$
y por tanto los gráficos de la función f y su inversa f^{-1} son idénticos.

Ahora sobre unos ejes de coordenadas escojamos algunos puntos y los puntos simétricos de ellos respecto a la recta $y = x$, usando regla y compás.

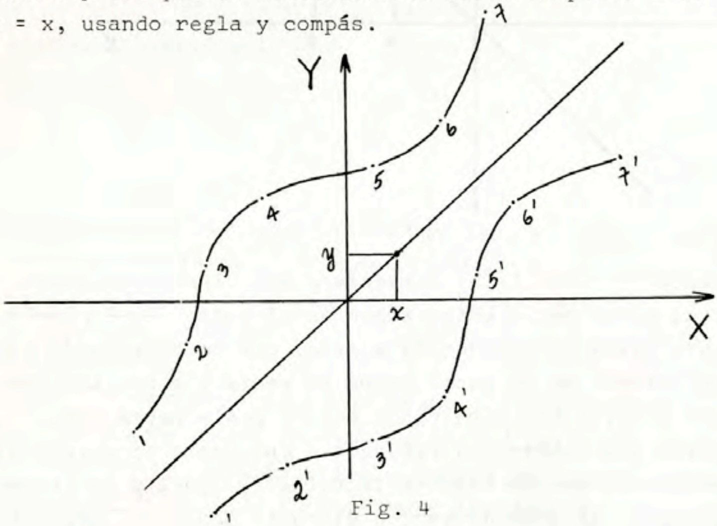


Fig. 4

Si la curva que une los puntos marcados 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, (fig. 4) es el gráfico de la función f entonces la curva que une los puntos 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', es el gráfico de su inversa f^{-1}. Si usted desea coloque un espejo sobre la recta $y = x$, perpendicular al plano donde esta la recta. Observando el espejo usted verá en él, el gráfico que corresponde a f^{-1}.

Físicamente, el gráfico de f^{-1} es el reflejo del gráfico de f usando la recta $y = x$ como espejo.

Ahora podemos considerar cuales serían los pasos a seguir en un laboratorio práctico.

i) Tracemos sobre un papel los ejes de coordenadas.

ii) Tracemos en ellos la recta $y = x$.

iii) Dibujemos el gráfico de una función.

iv) Coloquemos sobre la recta un espejo (si es posible de dos caras) en posición perpendicular al plano donde está la recta $y = x$.

v) Ahora podemos mirar en el espejo, en el se observa un gráfico, este gráfico es el gráfico de la inversa de la función.

Efectuemos el experimento con la siguiente parábola: (Busque un espejo).

$y = x^2 - 4$.

1) $V = (0,4)$

2) Tabla de valores:

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

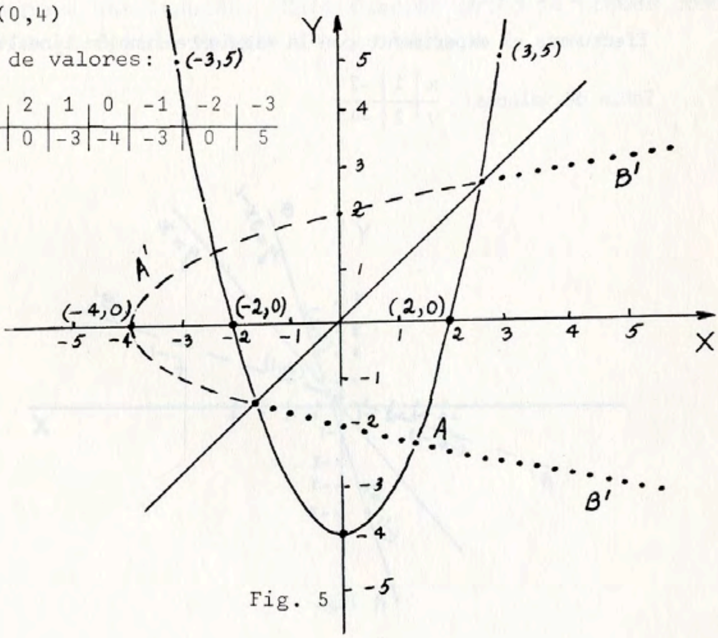


Fig. 5

Cuando colocamos el espejo sobre la recta $y = x$ la parte del gráfico que se encuentra por debajo de la recta (denotada A) se verá en aquél si colocamos éste con su cara hacia el cuarto cuadrante.

La imagen del $(0, -4)$ se verá dentro del espejo, así como las imágenes de las dos ramas curvas saliendo de éste (curva en trozos marcada A').

La parte de la curva que se encuentra sobre la recta (denotada B) se verá colocando el espejo con su cara hacia el tercer cuadrante. Las dos flechas que indican la continuidad de la curva se verán introduciéndose en el espejo.

El eje de Y positivo queda en posición horizontal sobre la parte positiva del eje de X y éste en la posición vertical del eje de Y. Observe l lector que el gráfico correspondiente a la inversa de la función es también una parábola. Esta parábola no es el gráfico de una función, como lo demuestra el hecho de que los puntos $(0, -2)$ y $(0, 2)$ pertenecen a dicho gráfico, lo que significa que un mismo x, $x = 0$, está f^{-1}-relacionado con dos y, $y = -2$ e $y = 2$.

Efectuemos el experimento con la siguiente función lineal: $y = 3x - 1$.

Tabla de valores:

x	1	-2
y	2	-4

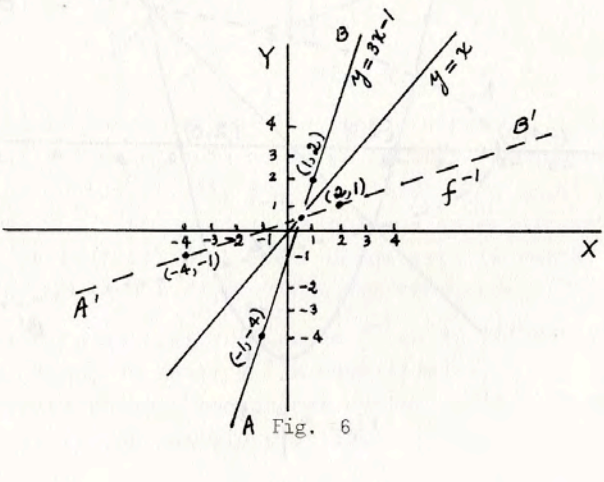


Fig. 6

Haciendo los mismos movimientos que para el ejemplo anterior la parte denotada A se observa el el espejo como la parte A' (línea en trozos), la parte denotada B' (línea en punto).

Observe usted que la inversa de esta función lineal es a su vez una función cuya gráfica es una línea recta.

Le invito para que efectúe usted el experimento con:

1. Una línea paralela al eje de las abscisas. (Escoja cual quier valor de y).

A esta función se la llama función constante ya que el valor de y es fijo (constante) para todos los valores de x.

2. La Función Esponencial $y = 10^x$.

En el caso 1) el gráfico de la inversa será una línea perpendicular al eje X, el "x" es constante para cuaquier valor de y, por tanto f^{-1} no es una función.

En el caso 2) el gráfico que usted obtiene es el gráfico correspondiente a una función. Esta función usted la conoce como la función logarígmica de base 10: $y = \log_{10} x$.

Einstein