SOBRE LA CONVERGENCIA DE LA SERIE $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)$

Por Dr. Eduardo Luna

En el primer número de la revista Magister de septiembre 1976, Dinápoles Soto Bello, y el autor de este artículo presentaron una solución al problema de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)$. En dicho artículo los autores invitaban a los lectores a presentar otras soluciones, pero nadie hasta el presente lo ha hecho. Me propongo en este artículo mostrar otra solución de la convergencia de la serie mencionada, que establece su convergencia sin recurrir a su convergencia absoluta.

<u>Lema 1.</u> El producto $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ es convergente.

<u>Demostración</u>

Sea $p_m = \prod_{n=2}^{m+1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ $(m=1,2,3\ldots)$. Los primeros términos de esta sucesión son: $\frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10} \ldots$

De aquí inferimos que:

$$p_m = \frac{m+2}{2m+2}$$

Pero: $\lim\limits_{m\to+\infty} p_m = \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{m+2}{2m+2} = \frac{1}{2}$. Luego, $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n2}\right) = \frac{1}{2}$.

<u>Lema 2.</u> $1 - \frac{1}{n^2} \leq n \operatorname{sen} \frac{1}{n}$, $n=1, 2, 3\ldots$

<u>Demostración</u>

Para $n=1,2,3\ldots$ se tiene:

$\frac{1}{n} < \operatorname{tg}\frac{1}{n} \Longrightarrow n > \cot\frac{1}{n} \Longrightarrow n \operatorname{sen}\frac{1}{n} > \cos\frac{1}{n}$

Luego:

$1 - n \operatorname{sen}\frac{1}{n} < 1 - \cos\frac{1}{n} = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2n}$

Por lo tanto: $1 - n \operatorname{sen}\frac{1}{n} < 2\,\frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{n^2}$.

Lema 3. La sucesión $b_n = \prod_{k=1}^{n} n \operatorname{sen}\frac{1}{k}$ es convergente y su límite B es positivo.

Demotración Observemos que $b_n > 0$ para todo n. Además,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = (n+1)\operatorname{sen}\frac{1}{n+1} < 1 \Longrightarrow b_{n+1} < b_n \text{ para cualquier } n.$$

Luego la sucesión $\{b_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente.

Por tanto, la sucesión $\{b_n\}$ es convergente.

Sea $B = \inf b_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Por el Lema 2: $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \leq \prod_{n=2}^{+\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$.

Luego: $\frac{1}{2} \leq \prod_{n=2}^{+\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$

Por lo tanto:

$$\frac{\operatorname{sen} 1}{2} < \prod_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{sen}\frac{1}{n} = B. \quad \text{Luego: } B > 0.$$

Observemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(k \operatorname{sen}\frac{1}{k}\right) = \ln(\operatorname{sen} 1) + \ln\left(2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\right) + \ldots + \ln\left(n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$$

$$= \ln \prod_{k=1}^{n} k \operatorname{sen}\frac{1}{k} = \ln b_n \text{ para toda } n.$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{+\infty} \ln k \operatorname{sen} \frac{1}{k} = \lim_{n\to+\infty} \ln b_n$$

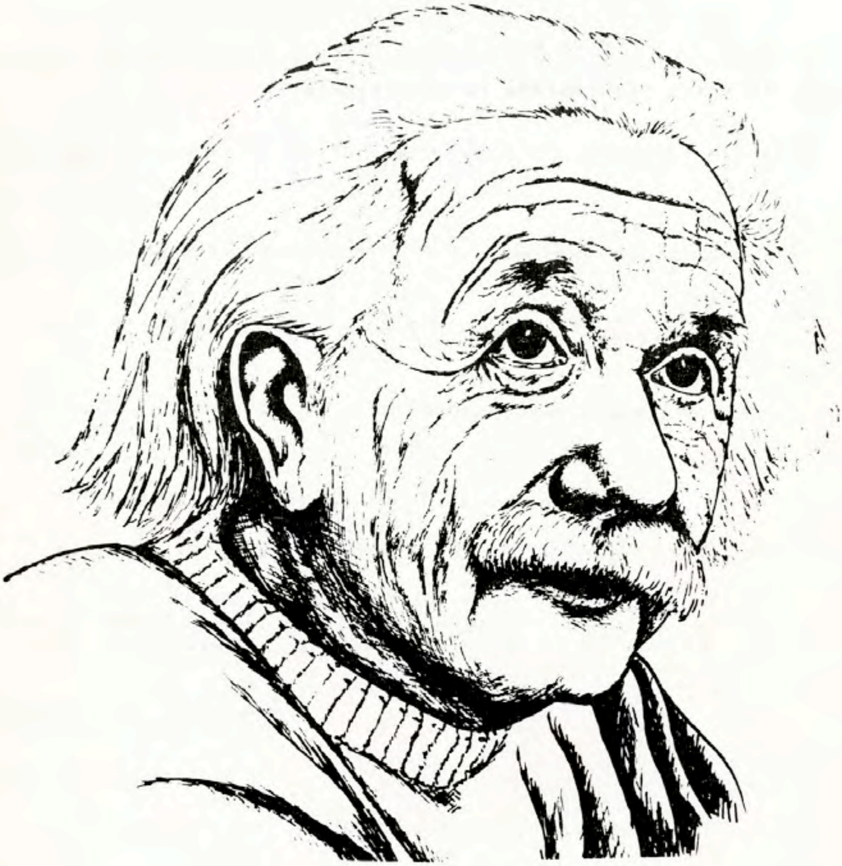
$$= \ln \left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right)$$

$$= \ln B$$

Luego, la serie considerada es convergente.

HOMENAJE

A



ALBERTO EINSTEIN

Magister se complace en rendir este homenaje al popular y eminente físico Alberto Einstein, cuya profunda inteligencia logró arrancar preciosos secretos a la Naturaleza, revolucionando con ello la Física e influyendo, a través de esta ciencia, en la evolución filósofica, científica y tecnológica de la civilización moderna.

El homenaje consiste en un cuerpo de tres artículos. En estos se presenta al lector la vida de Einstein, la relatividad restringida y la relatividad generalizada, respectivamente.

Hubiéramos querido incluir artículos sobre cada una de las conquistas científicas de Einstein pero no nos fue posible hacerlo por diversas razones. Quedan para otra ocasión el efecto fotoeléctrico, la estadística cuántica, el movimiento browniano, la cosmología del universo estático y la teoría del campo unitario.

Que este homenaje le sirva al lector como un estímulo que lo mueva a compenetrarse con la vida y la obra de este hombre extraordinario, ejemplo de honradez intelectual, de libertad interior, de modestia en el vestir, de preocupación por la justicia social y de sencillez y afabilidad en el trato con las personas.