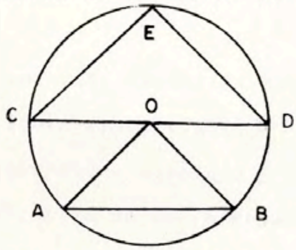
PROBLEMAS PROPUESTOS

La mejor solución de cualquiera de estos problemas será publicada en el próximo número con el nombre de su autor. Tambien se publicará la lista de los nombres de aquellos que hayan encontrado soluciones.

Los problemas marcados con un asterisco pueden ser resueltos por estudiantes del nivel secundario.

*1. Determinar los valores p y q para que $x^2 + 2x + 5$ sea un factor de $x^4 + px^2 + q$.

*2. En la figura $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$ son cuerdas congruentes en la circunferencia con centro O y radio r. La medida del arco AB es 90°. Hallar la razón de las áreas de los triángulos CED y AOB.



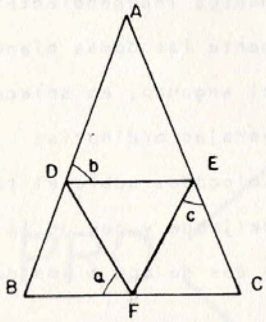
*3. Factorizar $(x^4 + x^2 - 5)^2 - 4(x^3 + 2)^2$ en factores con coeficientes enteros.

*4. Un vendedor de naranjas compra un lote a razón de 3 por 10 centavos. El las venderá a razón de 5 por 20 centavos. ¿Cuantas narajas debe comprar si desea que su benefico se $1.00?

Una vez que usted haya resuelto este problema, debe intentar resolver la siguiente generalización del mismo:

Un vendedor de naranjas compra un lote a razón de n por p centavos. El las venderá a razón de m por q centavos. ¿Cuántas naranjas debe comprar si desea que beneficio sea r centavos?

*5.



En la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son lados congruentes del tríantulo isósceles ABC, en el cual está inscrito el triángulo equilátero DEF. Denotemos el ángulo BFD por a, el ángulo ADE por b, y el ángulo FEC por c. Determinar la relación existente entre a, b y c.

*6. Entre dos anillos circulares situados en planos paralelos, cuyos centros se hallan en una perpendicular a esos planos, se extiende una película de jabón. Considerando la tensión superficial como una fuerza tangencial constante T por unidad de longitud en cualquier trayectoria en la superficie y despreciando el peso de la película, hallar su forma geométrica.

*7. Si se funden 20 kg. de estaño con 60 de cobre, ¿qué por ciento de la mezcla es estaño y qué por ciento es cobre? ¿qué por ciento del peso del estaño es el peso del cobre?

*8. ¿Cuántos litros de agua deben agregarse a 32 litros de alcohol de 95% de concentración para reducir la dilución a una cuya concentración sea de 75%?

9. Hallar $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(a + (k - 1)r)$ donde r es un número real.

Observación: Se pide hallar en este problema la suma de los senos de arcos que están en progresión aritmética.

10. Una persona realiza dos experimentos independientemente: el primero consiste en colocar aleatoriamente las damas blancas y negras en un tablero de ajedrez vacío y el segundo, en seleccionar al azar cinco cartas de un juego de barajas ordinarias. ¿Cual es la probabilidad de que las dos damas colocadas sobre el tablero de ajedrez se encuentren en posición de jaque y que de las cinco cartas seleccionadas hayan exactamente dos de una misma denominación?

11. Un tubo recto conecta dos puntos A y B sobre la superficie terrestre. Un punto material que se mueva a lo largo del tubo sometido a la acción de la gravedad es atraido hacia el centro de la tierra con una fuerza proporcional a la distancia. Si no hay rozamiento, demuéstrese que la aceleración del punto es proporcional a su distancia al punto medio del tubo, y que el tiempo que tarda en pasar por el tubo es independiente de las posiciones de A y B.

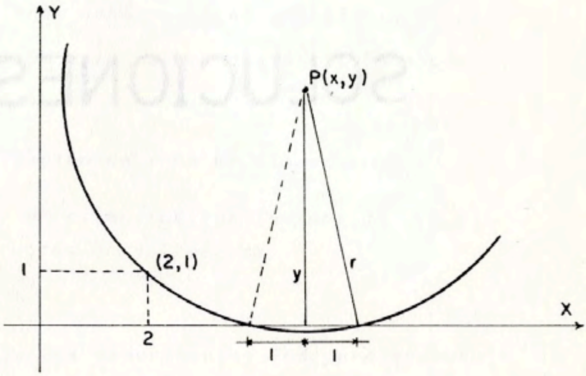
SOLUCIONES A

PRO BLEMAS

PRO PUESTOS

La siguiente solución fué presentada por el Ing. José Ml. Nicolás (Problema 5, Año 1, número 2, Nov. 1978)

En la figura:



$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{y^2+1}$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = y^2+1$$

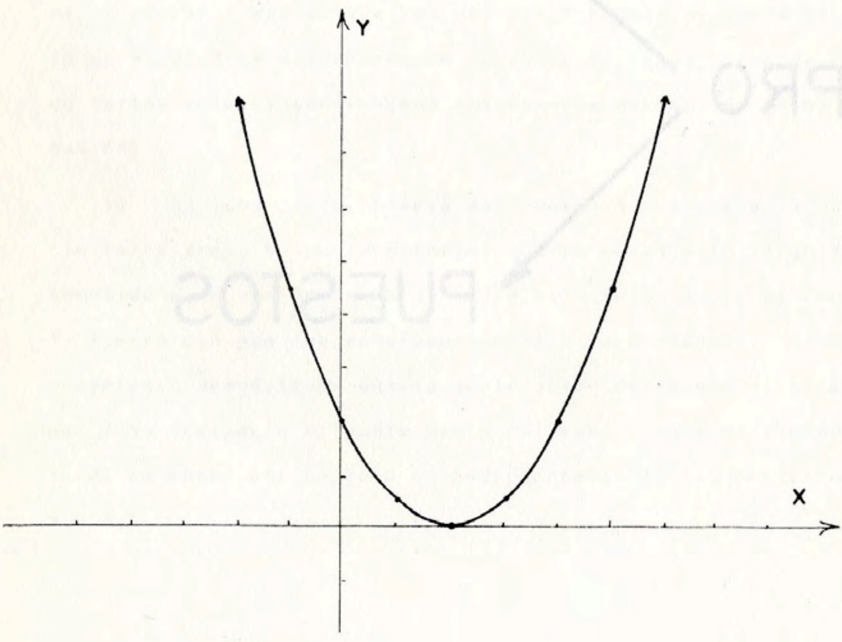
$$(x-2)^2+y^2-2y+1 = y^2+1$$

$$(x-2)^2-2y = 0$$

$$(x-2)^2 = 2y$$

Por lo tanto el lugar geométrico es:

Una parábola con vértice (2,0), eje paralelo al eje y, de lado recto igual a 2 unidades y cóncava hacia arriba.



El Ing. José Ml. Nicolás envío la siguiente solución al problema 4 del Año 1, número 2.

Sean:

$$z = \text{arc tg}\,\frac{1-x}{1+x} \iff \text{tg}\, z = \frac{1-x}{1+x} \implies$$

$$\implies \text{sen}\, z = \frac{1-x}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+x^2}} \quad \text{y} \quad \cos z = \frac{1+x}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+x^2}}$$

$$\omega = \text{arc tg}\,\frac{1-y}{1+y} \iff \text{tg}\,\omega = \frac{1-y}{1-y} \implies$$

$$\implies \text{sen}\,\omega = \frac{1-y}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+x^2}} \quad \text{y} \quad \cos\omega = \frac{1+y}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+y^2}}$$

Por otra parte:

$$\text{sen}\left(\text{arc tg}\,\frac{1-x}{1+x} - \text{arc tg}\,\frac{1-y}{1+y}\right) = \text{sen}\,(z-\omega) =$$

$$= \text{sen}\, z\ \cos\omega - \cos z\ \text{sen}\,\omega = \frac{1-x}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1+y}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+y^2}} - \frac{1+x}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+x^2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1-y}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+y^2}} =$$

$$= \frac{(1-x)(1+y) - (1+x)(1-y)}{2\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}} = \frac{2\,(y-x)}{2\,\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}}$$

O sea:

$$\text{sen}\left(\text{arc tg}\,\frac{1-x}{1+x} - \text{arc tg}\,\frac{1-y}{1+y}\right) = \frac{y-x}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}}$$

Luego:

$$\text{arc tg}\,\frac{1-x}{1+x} - \text{arc tg}\,\frac{1-y}{1+y} = \text{arc sen}\left(\frac{y-x}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+y^2}}\right)$$

Nota:

$$x \neq -1,\ y \neq -1$$

El Estudiante Grillermo Tavárez (IEM) mat. 75-0333 envió la siguiente solución al problema 6, año 1, numero 2, nov. 1978.

Utilizando la ley de Newton $\Sigma F = m \frac{dV}{dx}$ (1), pero introduciendo lo que se denomina en física fuerzas ficticias o pseufo-fuerzas que son las que dependen de la aceleración del sistema de referencia, tenemos que:

A)

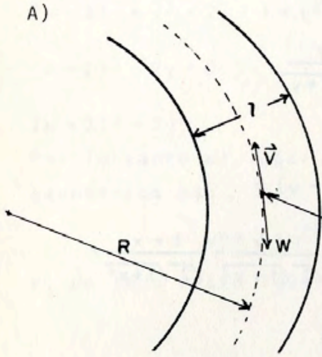


Fig.1

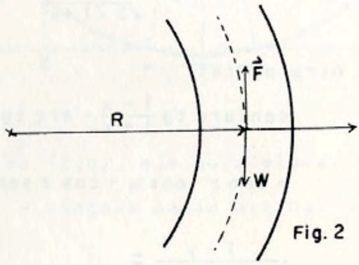


Fig. 2

L = ancho pavimento
$\vec{V}$ = vector velocidad
$\vec{A}$ = vector aceleración

$|\vec{V}|$ = constante, la dirección varía constantemente eso implica que haya un solo vector aceleración

$$A_n = \frac{V^2}{R} \qquad \text{como} \quad V = \frac{d}{t} = \frac{2\Pi R}{t} \text{ (velocidad constante)}$$

$$V = 2\Pi R f \qquad f = \frac{1}{T}$$

Usando la ecuación (1)

$$\mu F = ma$$

$$F_c = \frac{mV^2}{R}$$

Que puede ser expresado en términos de la velocidad angular

$$A_n = (\frac{2\Pi R f)^2}{R}$$

$$A_n = 4\Pi^2 f^2 R$$

Pero $\omega = 2\Pi f$ (en rad|s)

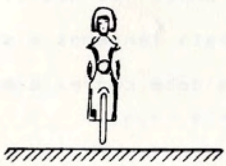
Tenemos entonces que:

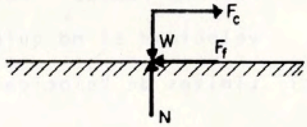
$$A_n = \omega^2 R$$

Luego F puede ser calculado de 2 maneras

$$F_c = \frac{mV^2}{R} = m\omega^2 R \quad (2)$$

b.1) Diagrama de Cuerpo Libre (D.C.L.)





Donde

F_f = Fuerza debida al rozamiento

$F_f = \mu_k N$

N = Normal

W = peso

F_c = Fuerza Centrípeta

Haciendo (1) $\Sigma F_x = 0$ se tiene que: $F_f = F_c$

Pero como la fuerza que mantiene el ciclista en la curva es producto de de la F_f entre el neumático y el pavimento, tendremos que la velocidad máxima (V_{max}) a que puede tomar la curva sin temor a resbalar es, siendo F_f el rozamiento máximo 200 Newtons, De la definición de ángulo fricción, se tiene que

$$tg\ \emptyset = \mu_k$$

De la fig. 3 se determina que

$$N = \omega \cos\theta \qquad \text{siendo } m = 100\ kg$$
$$N = mg \cos(5.73^\circ) \qquad g = 10\ m/s^2$$
$$N = (100)(10)\cos(5.73^\circ)$$
$$N = 995\ kg$$

Como

$$F_f = \mu_k N$$

$$\mu_k = \frac{F_f}{N}$$

$$\mu_k = \frac{200}{995} = 0.2$$

$$tg\ \emptyset = 0.2$$

implica que $\emptyset = 11.3^\circ$

Usando la ecuación 6

$$tg(5.73^\circ + 11.3^\circ) = \frac{V^2}{rg}$$

La velocidad máxima la obtenemos para $r = R + \frac{L}{z} = 12.5m$.

Calculando,

$$V_{max} = \sqrt{(R + \frac{L}{2})\, g\, tg\, 17^\circ} \simeq 6.1\ m/seg.$$

La velocidad mínima se obtiene en el borde inferior de la ruta con $r = R - \frac{L}{2}$ $= 7.5m$; es decir,

$$V_{min} = \sqrt{(R - \frac{L}{2})\ g\ tg\ 17^\circ}$$

$$V_{min} \simeq \sqrt{22.5\ m/s}$$

$$V_{min} \simeq 4.74\ m/s$$

$$\therefore\quad V_{max} \simeq 6.1 m/s$$
$$V_{min} \simeq 4.74\ m/s$$