CUADRADOS MAGICOS

Por Br. Federico Velázquez Miller
IEM-Matrícula 75-1508

En diciembre de 1973 el matemático sudamericano Roberto Tejeda presentó un brillante trabajo sobre "Los Cuadrados Mágicos y su Proyección sobre el Siglo XX". En él expuso la correlación existente entre el antiguo mundo de números esotéricos y el mundo espacial moderno. Según Tejeda, "al inicio de la historia de los números, estos no estaban relacionados con la técnica, ni eran instrumentos de medida que obedecían a leyes racionales. Simplemente se observaban los secretos de su comportamiento y los relacionaban con normas éticas y combinaciones místicas cualitativas. Se averiguaron relaciones entre números, luego analogías entre figuras geométricas, y siglo tras siglo hasta hoy, permanecen sin demostración extrañas relaciones y propiedades de los números" (1); podríamos citar, por ejemplo, el famoso teorema de Fermat: no es posible encontrar tres números naturales no nulos tales que $a^n + b^n = c^n$, para todo $n \geq 3$, n natural. Entre estas extrañezas tenemos también los cuadrados mágicos.

Un cuadrado mágico es un arreglo numérico formado por un tablero de n celdas de lado que contienen n^2 casillas en la cual se disponen n^2 números de manera tal que la suma en cualquier fila, columna o diagonal de estos números sea igual a una constante K. (2).

Matemáticos de todas las épocas se interesaron en el estudio de los cuadrados mágicos, tales como Fermat, Euler, Bose, etc., y actualmente el gran estadístico inglés Sir Ronald Fisher ha hecho estudios de importancia.

El eminente sabio francés Dr. S. R. de la Ferriere en sus obras hace énfasis sobre la importancia de los cuadrados mágicos, y señala que "desde la antiguedad tenían en verdad la propiedad de resolver problemas aritméticos (...), servir como clave de interpretaciones (...) estos números pueden ser reemplazados por letras, igualmente son valederos en sonometrías y se pueden tabular diversos cuadros de intervalos diatónicos en notaciones cifradas (...) son aceptados hoy en día por la ciencia que requiére de vez en cuando acudir a ellos para hallar ciertas soluciones matemáticas" (3).

Desde tiempos inmemorables en la India se han dedicado al estudio de los cuadrados, pues los usan en la llamada matemática esotérica, en el estudio de la Qabbalah, como sistema nemotécnico para recordar profundas conclusiones místicas, etc.; y hasta hoy los incluyen en sus programas de enseñanza. Es en un pueblo de ese país, llamado Nasik, de donde el Reverendo Frost llevó a Europa métodos para la construcción de cuadrados 4 x 4, que desde entonces se les conocen en Inglaterra con el nombre de Nasiks.

En el siglo XVI Cornelio Agrippa construyó cuadrados de orden 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y los asoció con los "siete planetas" de la época, la gente usaba un cuadrado grabado en plata de $n = 4$ para protegerse de la peste. En esa época el pintor matemático Alberto Durero incluyó en su famosa pintura titulada "Melancolía" un cuadrado mágico de $n = 4$. Las características más importantes de este cuadrado son: (4)

Sean C_1, C_2, C_3, C_4, las columnas; F_1, F_2, F_3, F_4, las filas del cuadrado; D_1, D_2, sus diagonales; denotemos por $S(C_i)$ la sumatoria de los números en C_i; de la misma manera para las filas y diagonales.

	C_1	C_2	C_3	C_4
F_1	16	3	2	13
F_2	5	10	11	8
F_3	9	6	7	12
F_4	4	15	14	1

D_2 Fig. 1a D_1

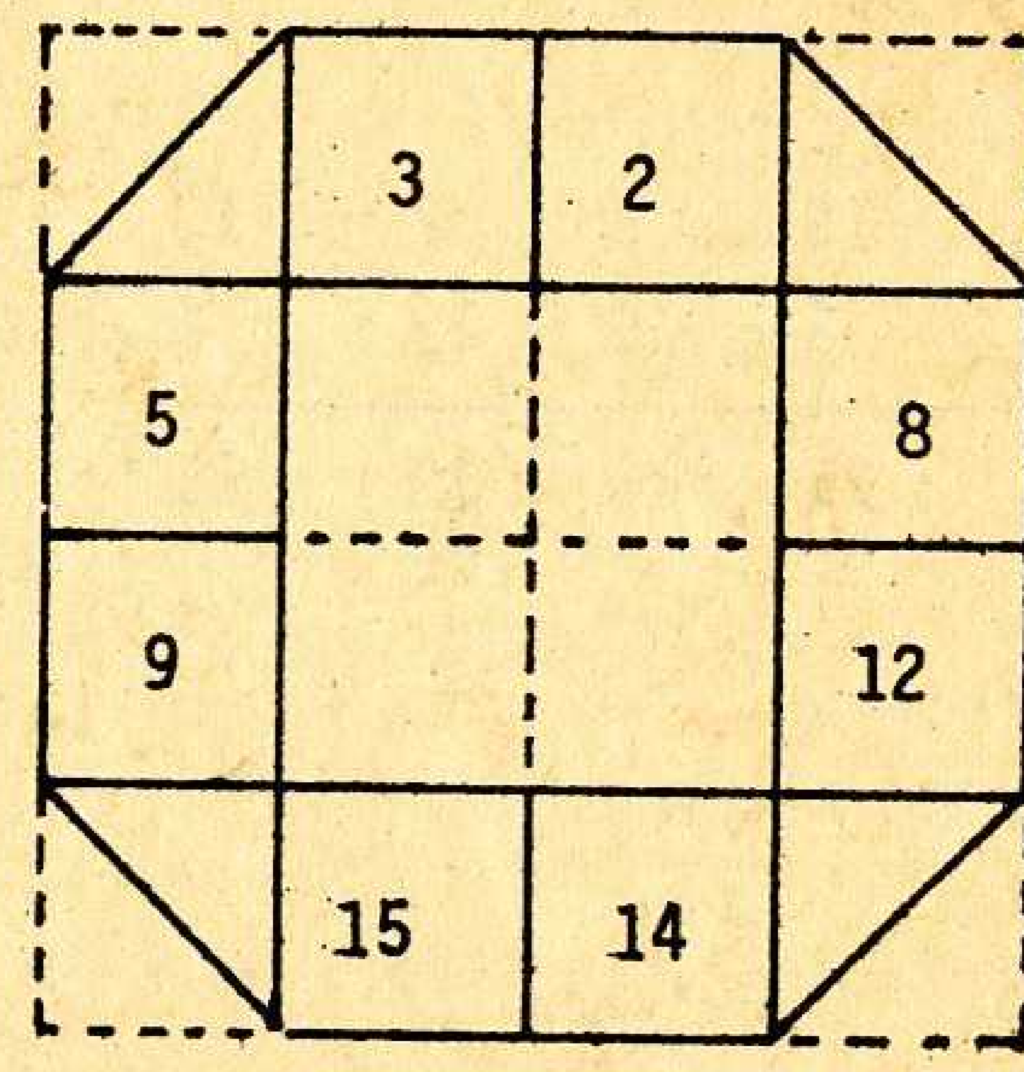


Fig. 1b

1. La fecha en que el grabado fue hecho (1514) aparece en las celdas centrales de F_4.

2. $S(C_1) = S(C_2) = S(C_3) = S(C_4) = S(F_1) = S(F_2) = S(F_3) = S(F_4) = S(D_1) = $ $= S(D_2) = 34$.

3. Denotemos por $S(F_i^2)$ como la sumatoria del cuadrado de los números contenidos en F_i, de igual forma para las columnas C_i y el octágono 0 de la figura 1b. Entonces, $S(F_1^2) + S(F_2^2) = (16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2) + (5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2) = 748$

$$S(F_3^2) + S(F_4^2) = (9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2) + (4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2) = 748$$

$$S(F_1^2) + S(F_3^2) = (16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2) + (9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2) = 748$$

$$S(F_2^2) + S(F_4^2) = (5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2) + (4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2) = 748$$

$$S(C_1^2) + S(C_2^2) = (16^2 + 5^2 + 9^2 + 4^2) + (3^2 + 10^2 + 6^2 + 15^2) = 748$$

$$S(C_3^2) + S(C_4^2) = (2^2 + 11^2 + 7^2 + 14^2) + (13^2 + 8^2 + 12^2 + 1^2) = 748$$

$$S(C_1^2) + S(C_3^2) = (16^2 + 5^2 + 9^2 + 4^2) + (2^2 + 11^2 + 7^2 + 14^2) = 748$$

$$S(C_2^2) + S(C_4^2) = (3^2 + 10^2 + 6^2 + 15^2) + (13^2 + 8^2 + 12^2 + 1^2) = 748$$

$$S(D_1) + S(D_2^2) = (16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2) + (13^2 + 11^2 + 6^2 + 4^2) = 748$$

$$S(0^2) = 3^2 + 2^2 + 8^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 9^2 + 5^2 = 748$$

$$S(D_1^3) + S(D_2^3) = 16^3 + 10^3 + 7^3 + 1^3 + 13^3 + 11^3 + 6^3 + 4^3 = 9248$$

$$S(0^3) = 3^3 + 2^3 + 8^3 + 12^3 + 14^3 + 15^3 + 9^3 + 5^3 = 9248$$

4. a)

$$\begin{array}{lcccccccc} F_1 & & 16 & & 3 & & 2 & & 13 \\ F_2 & + & 5 & + & 10 & + & 11 & + & 8 \\ \hline & & 21 & & 13 & & 13 & & 21 \end{array} \qquad \begin{array}{lcccccccc} F_3 & + & 9 & + & 6 & + & 7 & + & 12 \\ F_4 & & 4 & & 15 & & 14 & & 1 \\ \hline & & 13 & & 21 & & 21 & & 13 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & & C_2 & & \\ 16 & + & 3 & = & 19 \\ 5 & + & 10 & = & 15 \\ 9 & + & 6 & = & 15 \\ 4 & + & 15 & = & 19 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & C_3 & & C_4 \\ 15 & = & 2 & + & 13 \\ 19 & = & 11 & + & 8 \\ 19 & = & 7 & + & 12 \\ 15 & = & 14 & + & 1 \end{array}$$

5.

$$\left.\begin{array}{ll} 2 + 8 + 9 + 15 = 5 + 3 + 12 + 14 = 34, & 34/34 = 1 \\ 2^2 + 8^2 + 9^2 + 15^2 = 5^2 + 3^2 + 12^2 + 14^2 = 374, & 374/34 = 11 \\ 2^3 + 8^3 + 9^3 + 15^3 = 5^3 + 3^3 + 12^3 + 14^3 = 4624, & 4624/34 = 136 \end{array}\right\} \text{en el octágono}$$

Sobre las pinturas de Durero el Dr. de la Ferriere expresa (5): "En realidad, una pintura de Durero no es para mirarla sino para leerla, qué digo, para estudiarla (...)". Ciertamente existe una correlación entre el arte y la ciencia; el artista se abstrae plasmando la estética universal y el científico parte de la verificación concreta a la abstracción de la leyes, como lo afirma el Dr. Ferriz (1).

Ahora bien, con 16 celdas y 16 números podemos formar $16! \cong 2.1 \times 10^{13}$ cuadrados diferentes, de los cuales sólo hay unos tantos que son Mágicos; en 1675, el matemático francés Frenicle de Bessy presentó a la Academia de Ciencias de París la lista completa de 880 cuadrados mágicos diversos para n = 4. Introduciendo permutaciones y combinaciones entre los números, se consiguen 2880 de módulo 5, distintos, de los cuales sólo 720 resultan verdaderamente diferentes. A continuación expondré reglas para sacar algunos tipos de cuadrados para un determinado orden, utilizando los n^2 primeros números naturales.

I. Para n impar:

a) Método de las diagonales de La Hire (6):

i) Se construye un cuadrado con n^2 casillas, luego en una de las diagonales mayores se coloca el número central correspondiente, ej.: de 1 2 3 4 5 es 3. N_c = número central = $(n + 1)/2$. En una de las diagonales menores paralelas a la diagonal mayor escogida se coloca $N_c + 1$ ó $N_c - 1$ y así siguiendo uno u otro orden, cuando se llega a 5 sucede el 1, y viceversa. En vez de iniciar el conteo hacia arriba, como en el ejemplo, lo hubiéramos podido hacer para abajo también.

N_c

$N_c - 1$

2	1	5	4	3
1	5	4	3	2
5	4	3	2	1
4	3	2	1	5
3	2	1	5	4

$N_c + 1$

Fig. 2a

ii) Hacemos otro cuadrado parecido, en vez de 1 a 5, de 0 a 20, con múltiplos de n. Esta vez $N_c = n(n - 1)/2$ y el número mayor es $n(n - 1)$.

Nótese que este cuadrado tiene las <u>diagonales perpendiculares al anterior</u>, debe ser así. No importa si hacemos el conteo de arriba hacia abajo o viceversa.

N_c $\quad N_c - n$

$N_c + n$

10	5	0	20	15
15	10	5	0	20
20	15	10	5	0
0	20	15	10	5
5	0	20	15	10

Fig. 2b

iii) Se forma el cuadrado sumando las celdas correspondientes a los dos cuadrados anteriores:

12	6	5	24	18
16	15	9	3	22
25	19	13	7	1
4	23	17	11	10
8	2	21	20	14

K = 65

Fig. 2c

Ejemplo para n = 3:

2	1	3
3	2	1
1	3	2

+

0	6	3
6	3	0
3	0	6

=

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Fig. 3

K = 15

iv) Cálculo de la constante K:

En el punto i) la suma de los números de cualquier fila o columna es $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = (n^2 + n)/2$ (fórmula que demostró Carlos Federico Gauss a la edad de 8 años (7)).

En el punto ii) la suma de los números en cualquier fila o columna es

$$0 + n + 2n + 3n + \ldots + (n - 1)\, n$$

$$= n\left[1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)\right] = n\left[n(n + 1)/2 - n\right] = (n^3 - n^2)/2$$

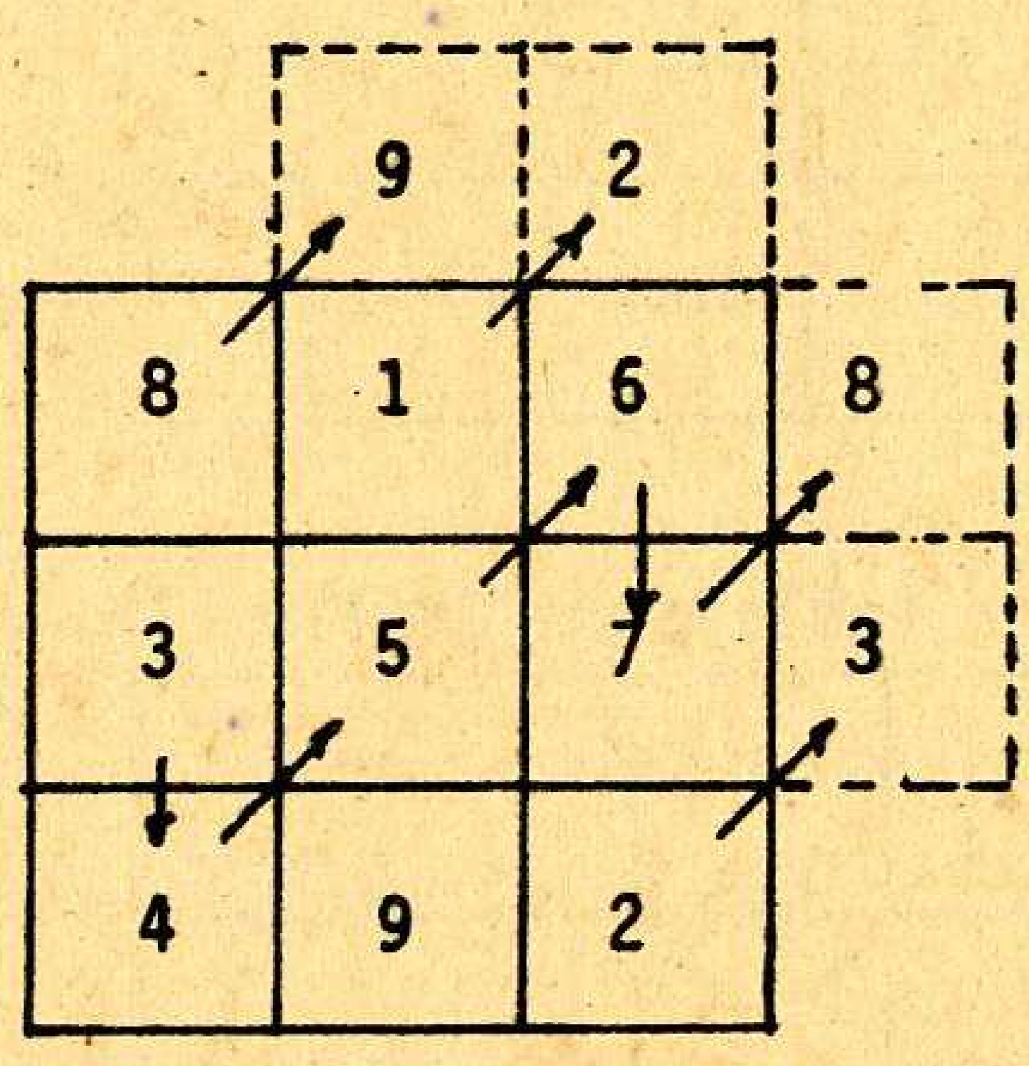
En el punto iii) sumamos ambos resultados,

$$K = (n^2 + n)/2 + (n^3 - n^2)/2$$

$$K = \frac{n^3 + n}{2}.$$

Aunque sólo hemos hecho la demostración de la fórmula para este método, hay que aclarar que la misma se verifica para todos los cuadrados formados con los n^2 primeros números naturales.

b) Método de La Loubre (8):



$K = (n^3 + n)/2 = 15$

Fig. 4

i) Se coloca el 1 en la parte central de la casilla superior.

ii) Siguiendo el movimiento oblicuo de las flechas se continúan los números.

iii) Si se sale fuera del cuadrado se pone el número en la casilla opuesta de la fila o columna en que se está.

iv) Si se topa con un número ya escrito se coloca en la celda de abajo siguiente (fíjese en la fig. 4, el 3 y 4).

v) Si se llega a la esquina superior derecha se aplica la regla iv).

Ejemplo para n = 7, $K = \frac{n^3 + n}{2} = 175$. Siempre el último número debe aparecer en el centro de la fila inferior (en este método).

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	25	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Fig. 5

II. Cuadrados doblemente par (múltiplos de 4): (1)

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

Fig. 6a

16			13
	11	10	
	7	6	
4			1

Fig. 6b

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Fig. 6c

Fig. 6.a: Se dibujan las diagonales, se coloca el 1 en el cuadro superior izquierdo y se escriben los números de izquierda a derecha horizontalmente. Sobre la diagonal no se escribe. Fig. 6.b: Lo contrario, se coloca el 1 en la celda inferior derecha y se cuenta de derecha a izquierda, esta vez sólo se escribe en las

diagonales. Luego, se superponen los dos cuadrados. Para el caso general, las diagonales que se trazan son las de cada cuadrado de orden 4 que resultan al dividir el cuadrado mayor, como indica la fig. 7.

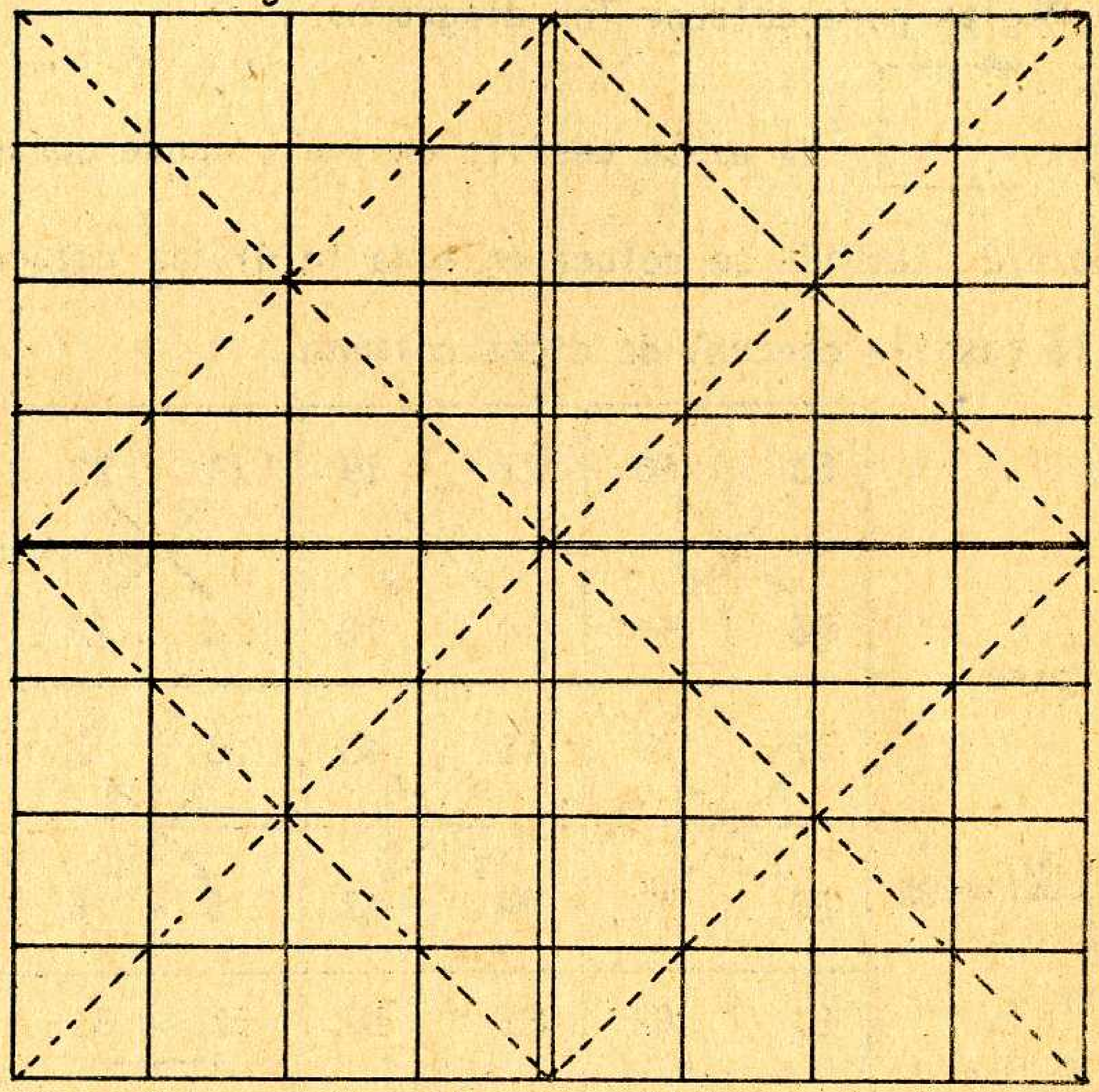


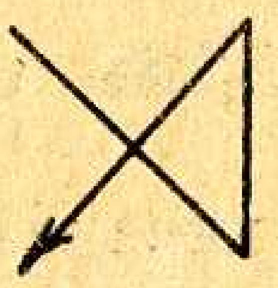
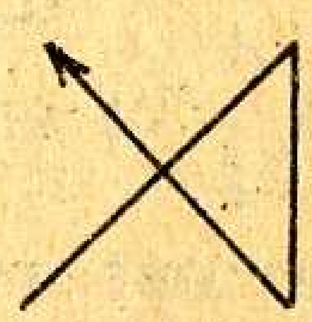
Fig. 7 Trazado de las diagonales para el cuadrado mágico de orden n = 8.

El matemático italiano Rafael Leonardi publicó en 1938 un método para la construcción de cuadrados mágicos de orden $n = 2(2m + 1)$ donde m es entero; son los cuadrados más complejos y difíciles, ya que no siguen un patrón determinado.

III. Cuadrados con n = duplo de números primos, para $n \geq 6$. Método del Ingeniero J. D. Morales (portorriqueño) (6).

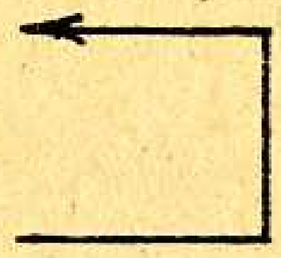
i) Se llena un cuadrado mágico de orden n/2 con el método de La Hire o La Loubre.

ii) Entonces, tenemos tres tipos de diagramas:

a)  b)  c) 

Se colocan los diagramas para formar la distribución celular. Guiándose del cuadrado n/2 hecho en i), se colocan los cuatro primeros números en la celda donde está el 1 del cuadrado n/2 siguiendo la secuencia de las flechas, lo mismo para los números del 5 al 8, y así sucesivamente.

iii) Reglas para colocar los diagramas:

a)  Va en la casilla central, donde convergen las diagonales del cuadrado n/2. También se coloca en toda la última columna de la derecha, exceptuando la casilla central de dicha columna.

Ejemplo para

n = 10,

$$K = \frac{10^3 + 10}{2} = 505$$

14	5	6	22	18
20	11	2	8	24
21	17	13	4	10
7	23	19	15	1
3	9	25	16	12

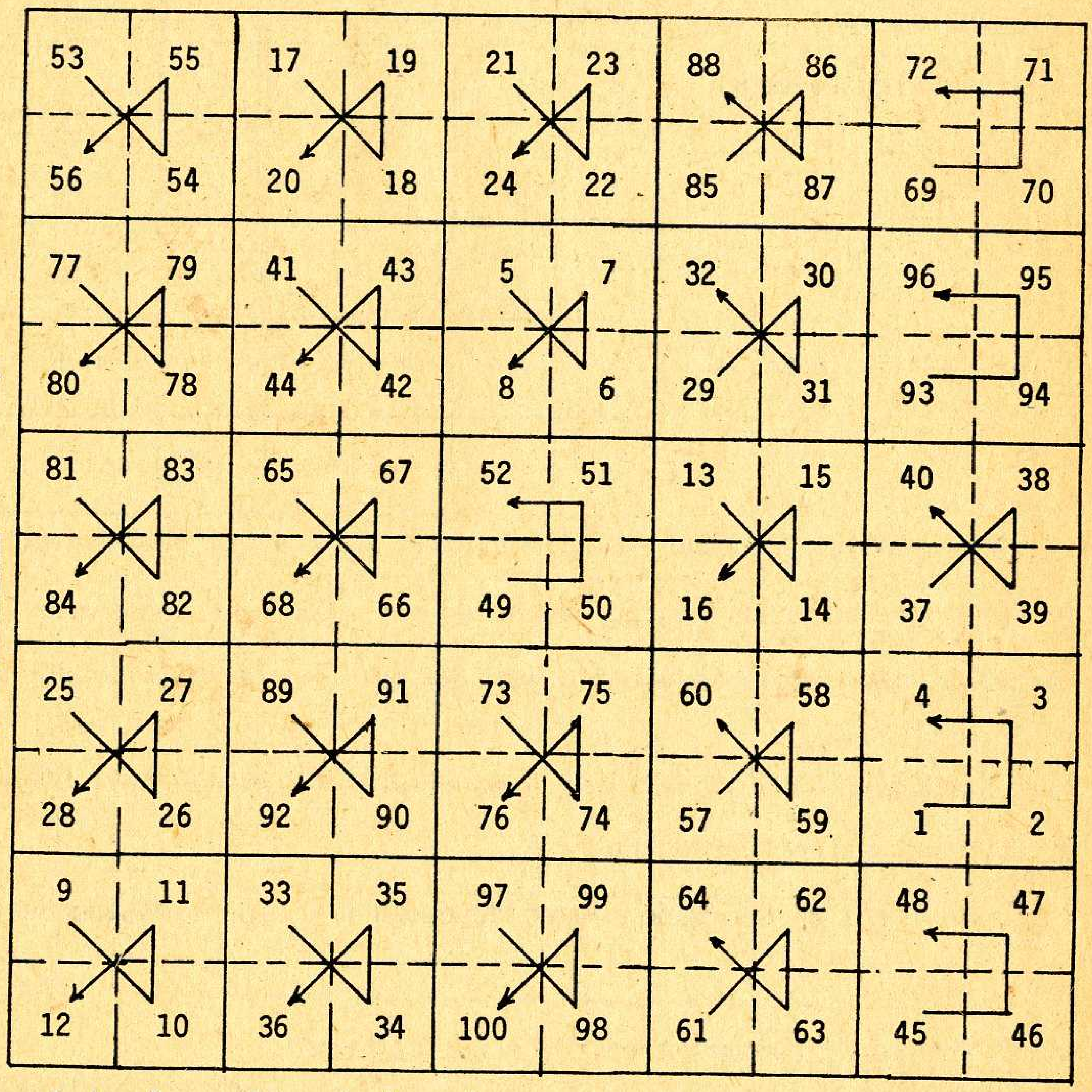
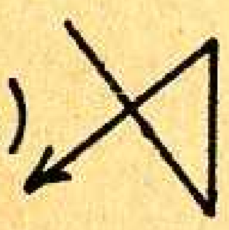
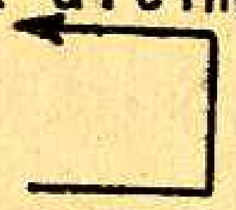
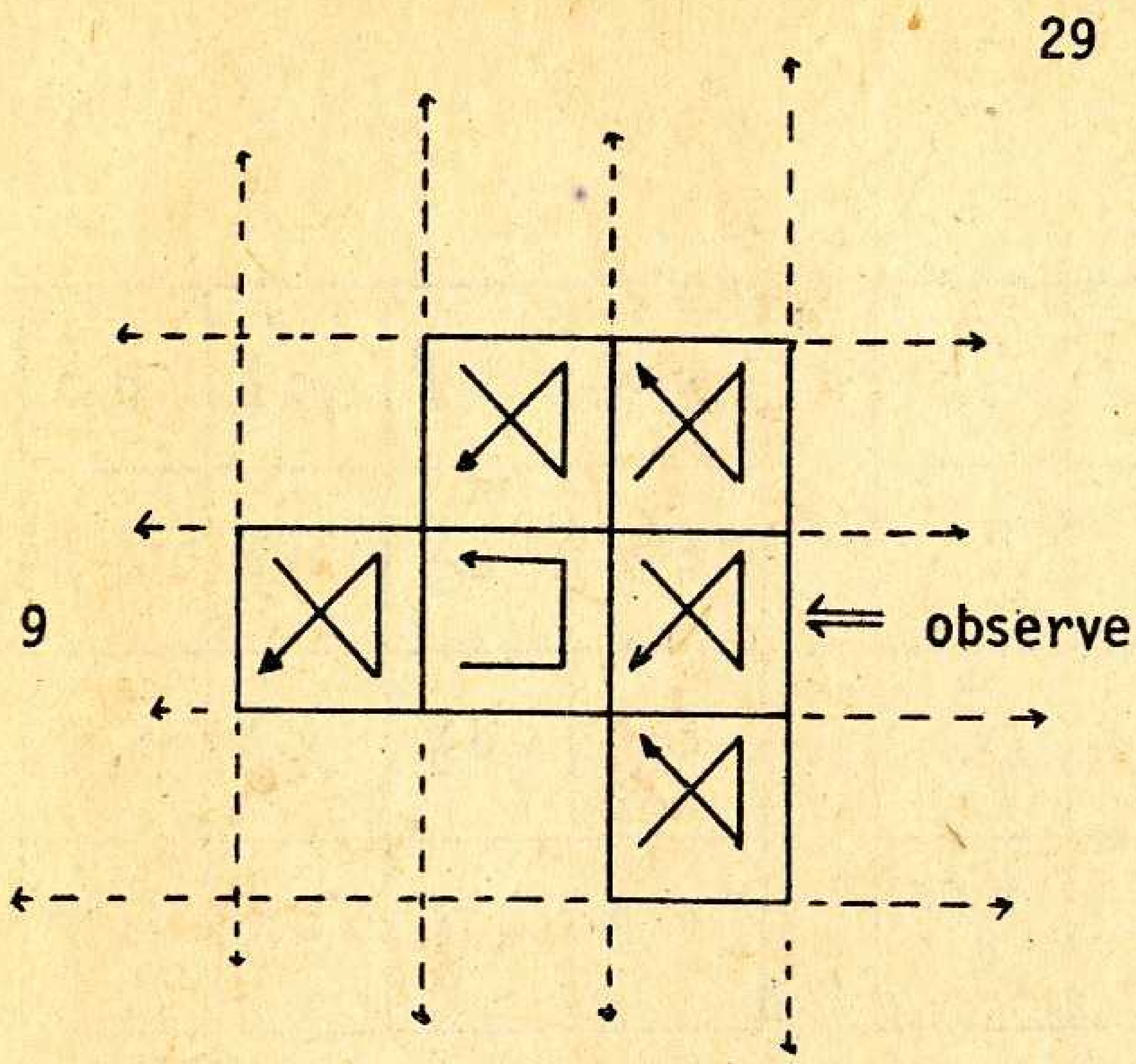


Fig. 8a y Fig. 8b

b)  Va en todas las celdas de la columna del centro a la última de la izquierda, exceptuando la celda central que ya está ocupada por a)  También en la celda correspondiente al lado derecho de la casilla central como se muestra en la fig. 9.



ig. 9

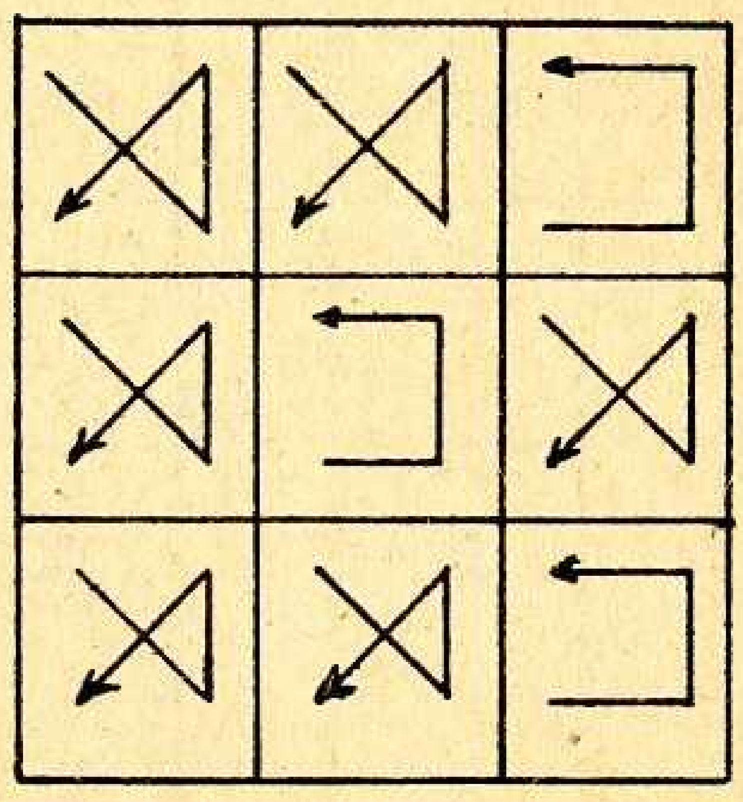


Fig. 10. Distribución celular para n = 6.

c) Si el cuadrado n/2 permite más casillas vacías, entonces se rellena con este diagrama las casillas restantes.

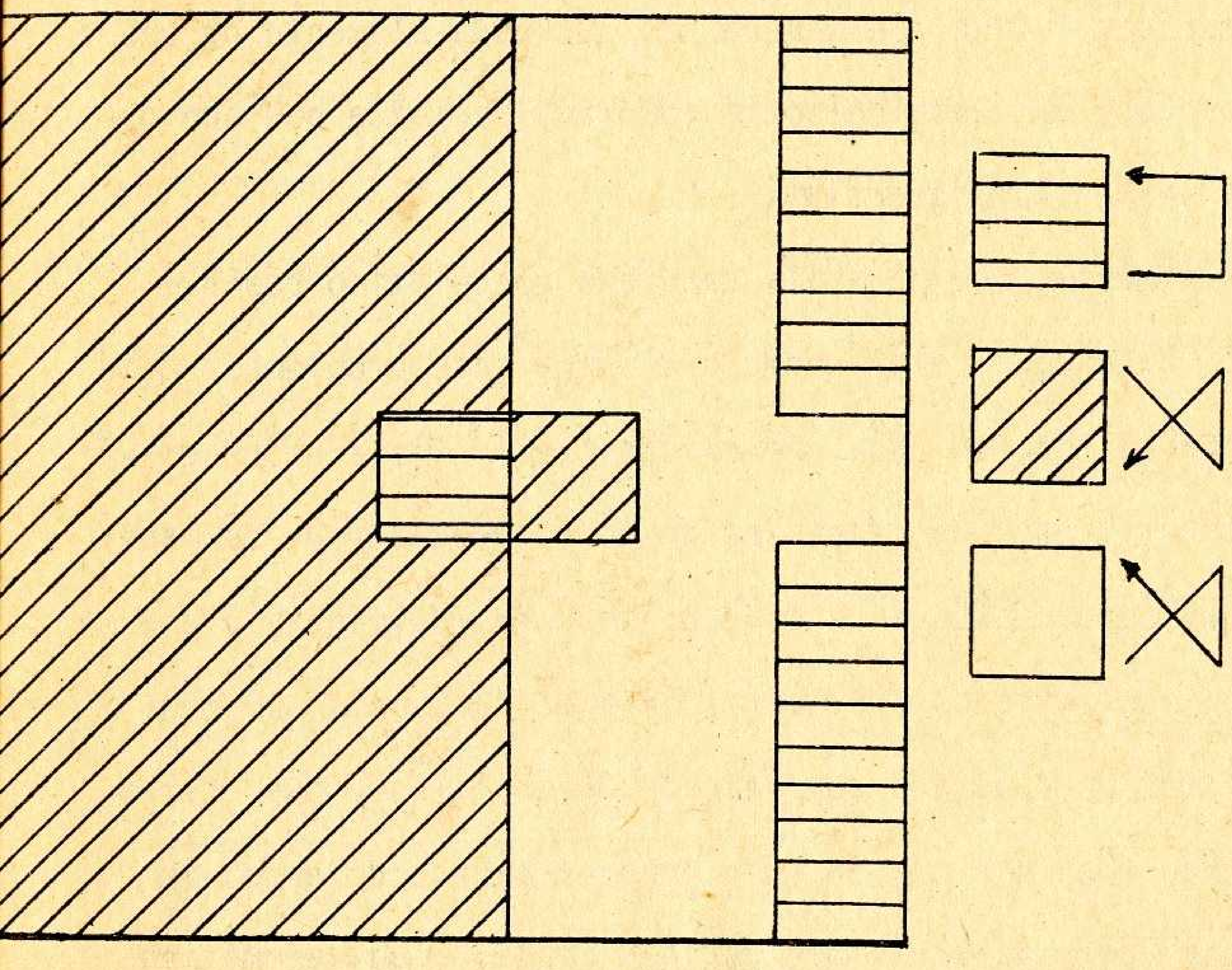


Fig. 11. Distribución celular por zonas. Amigo lector: le exhorto a que haga el de 22 x 22 por este método.

Otros Cuadrados Mágicos

El matemático suizo Leonardo Euler escribió en el ocaso de su vida (1707-1783) Investigaciones sobre una nueva especie de cuadrados mágicos". A estos los llamó recolatinos. Se define como un cuadrado latino aquel cuadrado de n^2 casillas y n lementos ordenados de tal manera que en cada fila y columna aparezca una vez cada no de los n elementos.

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

Fig. 12a

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

Fig. 12b

aα	bβ	cγ	dδ
bγ	aδ	dα	cβ
cδ	dγ	aβ	bα
dβ	cα	bδ	aγ

Fig. 12c

Si superponemos dos cuadrados latinos de manera tal que cada elemento de uno se une una vez y sólo una con cada elemento del otro cuadrado, se dice que son ortogonales y a su combinación se le llama grecolatino.

En la época de Euler se demostró que no había cuadrado grecolatino posible de orden 2; había de 3, 4, 5. Entonces, Euler formuló el siguiente problema: "Consideremos seis regimientos diferentes; en cada uno existen seis oficiales de grado diferente. ¿Se puede disponer a esos 36 oficiales en forma de cuadrado de manera tal que cada fila y cada columna contenga un oficial de cada regimiento y uno de cada grado?". Basándose en sus intentos fracasados afirmó: "No vacilo en concluir que es imposible encontrar un cuadrado completo de 36 casillas y que ocurra lo mismo para los cuadrados de orden n = 10, 14 y en general para todo orden impармente par" (para Euler: par pero no divisible por 4). En 1958, un matemático llamado Parker hizo dudar las hipótesis de Euler, y Bose siguiendo sus indicaciones, junto con Shrikhande, hizo cuadrados de orden superior, lo que invalidó las hipótesis de Euler para n > 6. (1).

En 1959, y en años posteriores Parker programó las calculadoras Militaire Univac 1206 y el resultado fue un centenar de cuadrados grecolatinos de orden 10. Computadoras modernas podrían buscar aleatoriamente cuadrados grecolatinos, pero recordemos que es un trabajo extenso depurar el número de casos favorables dentro de los posibles; pues hay x formas de permutar los n números o letras que se repiten n veces en las n celdas, y si independizáramos las filas e hiciéramos rotar en cada una los n elementos que las ocupan tendríamos entonces,

$$x = n! \;.\; n! \;\ldots\; n! \;(n \text{ veces})$$

$$x = (n!)^n$$

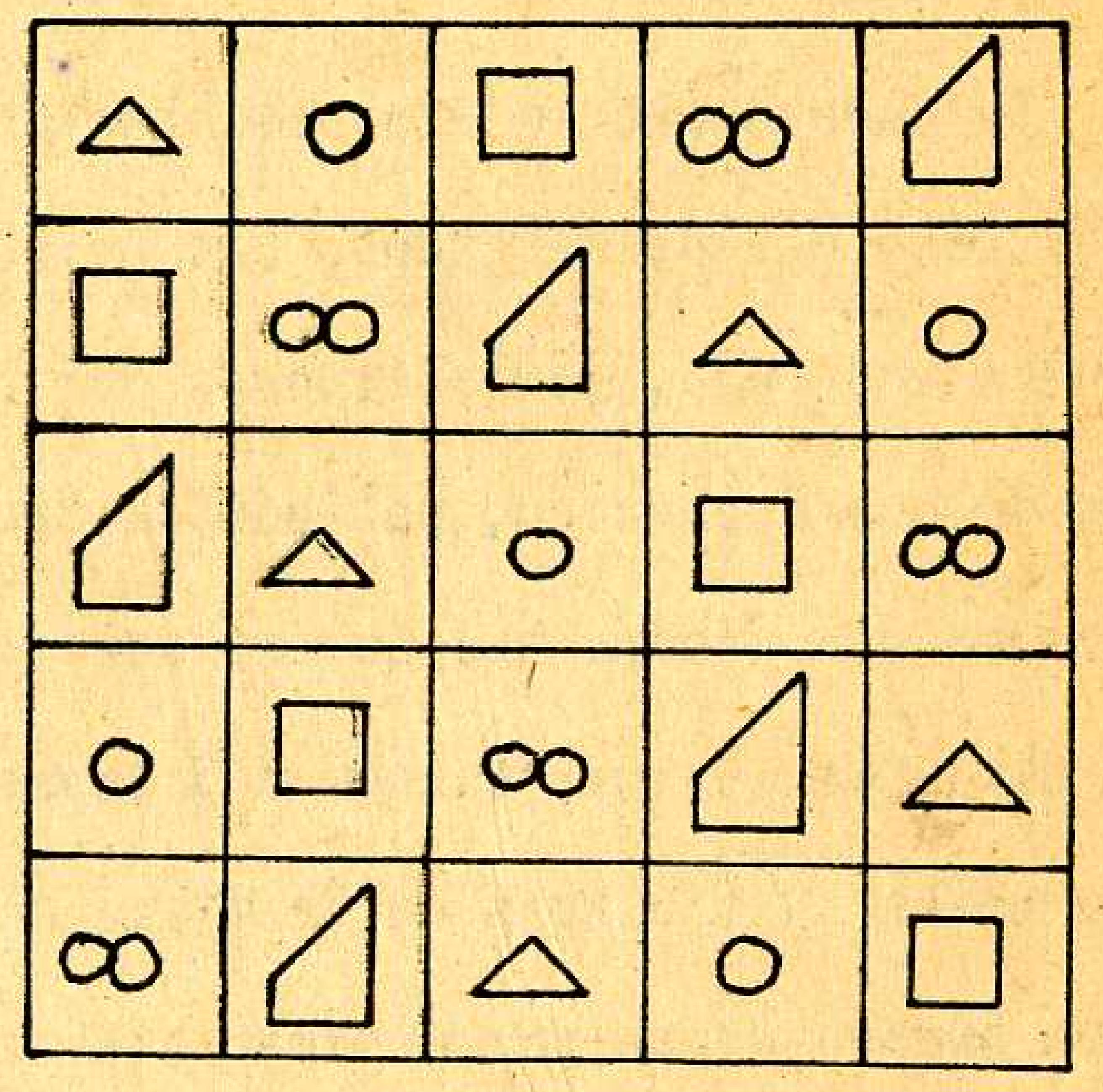
De la misma manera habrán x formas de permutar los n elementos del segundo cuadrado, que unido al primero quizás forme uno con características completamente grecolatinas; el resultado es un número enorme:

$$x \;.\; x = x^2 = ((n!)^n)^2 = (n!)^{2n}.$$

Se demostró que el número máximo de cuadrados grecolatinos mutuamente ortogonales podría ser n - 1. Al conjunto de los n - 1 cuadrados mutuamente ortogonales se les llamó "conjunto completo". En la fig. 13 se presenta el conjunto completo para n = 5. Hasta el momento se han encontrado conjuntos completos para n = 7, 8 9. El orden 10 es el más débil y ni siquiera se ha podido hallar una terna mutuamente ortogonal para este orden, por ello han fracasado los recientes trabajos.

Cuadrados mutuamente ortogonales de orden 5: (9)

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3



Sib	Sol	Fa	Mib	Do
Mib	Do	Sib	Sol	Fa
Sol	Fa	Mib	Do	Sib
Do	Sib	Sol	Fa	Mib
Fa	Mib	Do	Sib	Sol

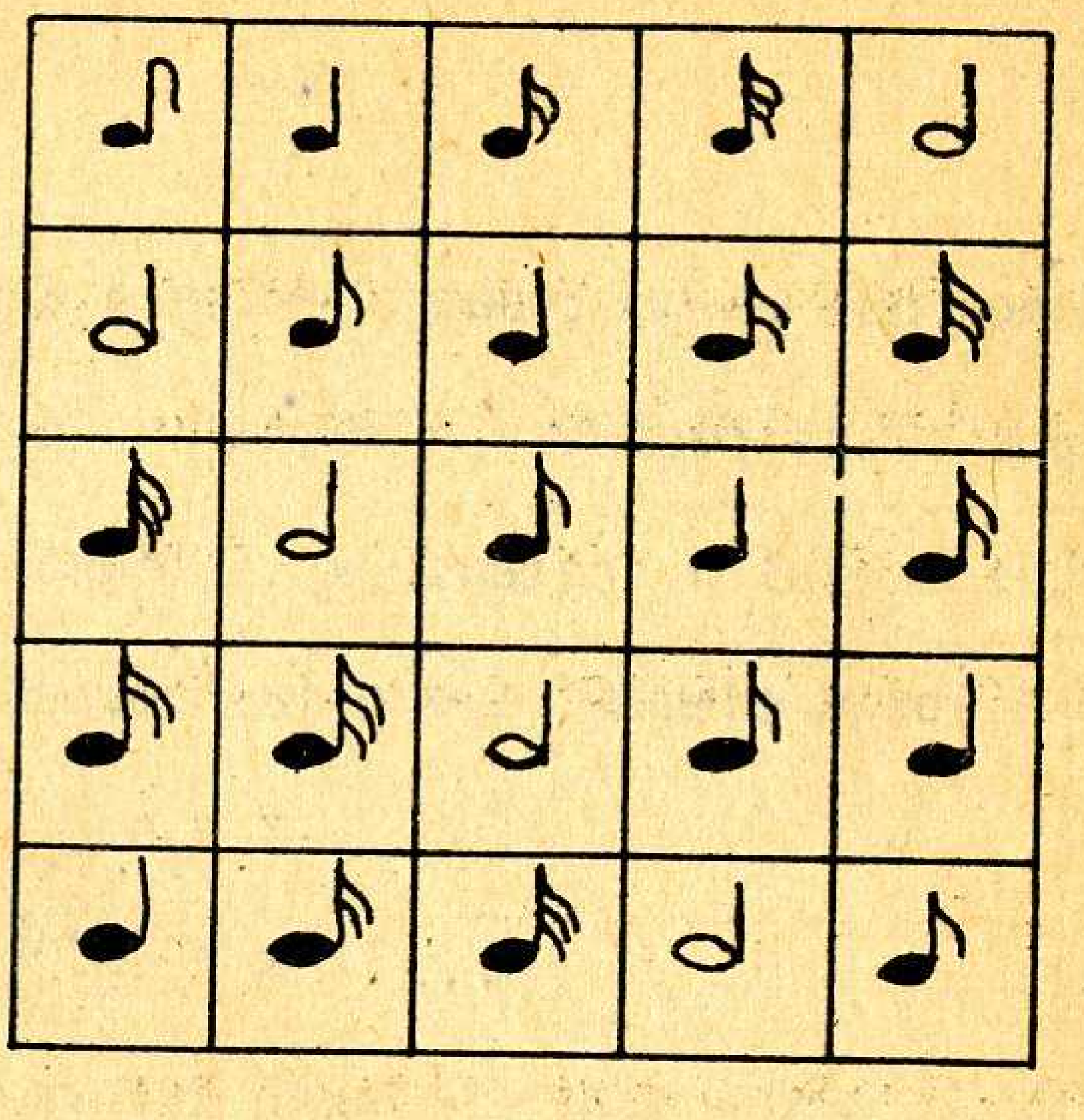


Fig. 13

Dixon y Massey en 1970 usaron un cuadrado latino para el análisis de la inteligencia de un grupo de niños aplicándole tets diferentes en su obra "Introducción al Análisis Estadístico", para ello se usó un cuadrado 4 x 4. Sir Ronald Fisher -uno de los más grandes estadísticos de la época (1890-1962)- mostró la aplicación en agronomía de los grecolatinos. Supongamos que queremos ahorrar tiempo y dinero, y queremos averiguar los efectos de productos químicos en plantas; tenemos 7 tipos diferentes de tratamientos para 7 variedades de plantas en 7 etapas diferentes de su crecimiento, sembradas en 7 terrenos distintos; la solución es un cuadrado grecolatino. Los terrenos serían las columnas, las variedades de plantas las letras latinas, los fertilizantes las letras griegas, y las etapas de crecimiento las filas del cuadrado.

Se usan ahora en experimentaciones biológicas, médicas, sociológicas, y en el estudio de los mercados. Las celdas pueden tratarse ahora de una vaca, un paciente, una hoja, jaula ocupada por animales, un nuevo producto, punto de aplicación de una inyección, período de tiempo, o un grupo de observadores. Se acabó el problema del médico que quiere verificar los efectos de 5 píldoras diferentes sobre personas que pertenecen a 5 zonas de diferentes edades de 5 grupos de pesos diferentes, y 5 etapas de la misma enfermedad. Los métodos experimentales estadísticos pueden organizar experiencias que contengan 4 variables con diez valores caa una y controlarlas fácil y cómodamente usando el cuadrado grecolatino 10 x 10, uya existencia se negó por dos siglos. (1).

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Fig. 14

Cuadrado grecolatino 10 x 10

NOTAS Y REFERENCIAS

(1) David Ferriz Olivares. "Serge Raynaud de la Ferriere, su pensamiento primordial, yo realicé a Dios a través de las Matemáticas". Servicios Gráficos Mobagrar. Perú. Septiembre, 1977.

(2) Los números pueden ser de cualquier clase y pueden no estar ligados a ninguna relación, pero se consideran normalmente los que están en progresión aritmética. Por ejemplo, en el cuadrado mostrado en la figura anexa, los números no tienen relación entre sí, salvo que en la primera fila está inscrita la fecha de mi nacimiento: 28 de mayo de 1957.

28	5	19	57
40	22	26	21
32	17	44	16
9	65	20	15

Fig. anexa, K = 109

(3) Serge R. De la Ferriere. "Libro Negro de la Francmasonería". Editorial Diana. México.

(4) Jerome S. Meyer. "Fun with Mathematics". Second Premier Pritting. February. 1961.

(5) Estos párrafos están contenidos en la obra "El Arte en la Nueva Era", escrita por el Dr. De la Ferriere; aún no se ha publicado la obra, aunque ya su autor murió (1962). Los manuscritos están en manos del Dr. David Ferriz -su discípulo- y la Gran Fraternidad Universal.

(6) J. D. Morales. "Cuadrados Mágicos". Revista CIAA. Octubre-Noviembre-Diciembre 1971.

(7) Existe una bella anécdota de Gauss sobre el hecho, que se puede encontrar en la pág. 131 del libro "La magia de los números" del Dr. Paul Karlson. Editorial Labor. Barcelona. 1966.

(8) Dolciani, Berman, Freilich. "Algebra moderna, estructura y método", libro

(9) El orden en que puse las notas en la filå superior corresponden al orden·
ción en la clave de sol del Nocturno No. 2 Op. 9 de Federico Chopin.