LOS ESPACIOS DE BANACH

Por Dr. Eduardo Luna R.

I. INTRODUCCION

Los espacios que vamos a considerar fueron creados por uno de los más ilustres e influyentes matemáticos del presente siglo, Stefan Banach (1892-1945). El principal propósito de este artículo es familiarizar al lector con algunos aspectos y métodos utilizados en la matemática moderna. Hoy día el matemática está interesado en el estudio de estructuras abstractas y las relaciones entre estas estructuras. De esta forma se logra aunar teorías aparentemente disímiles con el consiguiente ahorro de tiempo y esfuerzo mental.

Con el fin de aclarar las ideas expuestas en el párrafo anterior vamos a considerar ejemplos concretos. Denotemos por R el conjunto de los números reales y por R^n el espacio euclideano de dimensión n. Sea $I = \langle a,b \rangle$ un intervalo cerrado sobre el eje real y $C(\langle a,b \rangle) = C(I)$ el conjunto de las funciones continuas con valores reales definidas en el intervalo I. ¿Qué tienen en común estos espacios R, R^n, C(I)? ¿Son sus estructuras tan disímiles que tengamos que estudiarlas por separado? Consideremos los problemas siguientes:

<u>Problema 1.1</u>. ¿Existe un único número real no negativo x tal que

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} \;?$$

Problema 1.2. Sean a y b números reales. ¿Existen números reales únicos x,y tales que:

$$3x - \cos y + \operatorname{sen} x = a$$

$$3y - \cos x - \operatorname{sen} y = b?$$

Problema 1.3. Sea y_0 un número real y f una función continua con valores reales definida en I x R. ¿Existe una única función y en el espacio C (I) tal que:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ para toda } x \text{ en el intervalo } I,$$

$$y(a) = y_0?$$

Los problemas 1.1, 1.2, 1.3 han sido planteados en los espacios R, R^2 y C (I) respectivamente. Aparentemente son tan diferentes que no concebimos que exista nexo alguno entre ellos.

En este artículo veremos que los espacios R, R^n, y C (I) son espacios de Banach y que la solución de los problemas 1.1, 1.2, 1.3, se reduce a determinar la existencia de puntos fijos de una función cuyo dominio es un espacio de Banach X y cuyos valores son puntos en dicho espacio, es decir, una autofunción en el espacio de Banach X. También notaremos que en los espacios de Banach se conjugan estructuras algebraicas y topológicas.

II. ESPACIOS VECTORIALES O LINEALES

Aunque el concepto de vector fue utilizado en primer lugar por los físicos, quienes asignaron esa denominación a todo segmento dirigido, la estructura algebraica conocida como espacio vectorial o lineal es una de las más utilizadas en el análisis matemático moderno.

Un espacio vectorial (o espacio lineal) sobre los reales es un conjunto X de elementos llamados vectores con las propiedades siguientes:

A) A cada par, x e y, de vectores en X le corresponde un vector único $x + y$, llamado la suma de x e y, de tal manera que:

(1) $x + y = y + x$; x, y en X,

(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$; x, y, z en X,

(3) existe en X un vector único θ tal que $x + \theta = x$ para todo vector x,

(4) por cada vector x en V existe un único vector $-x$ tal que $x + (-x) = \theta$.

B) A cada par, r y x, donde r es un número real y x es un vector en X, le corresponde un vector único $r . x$ en X, llamado el producto de r y x, de tal manera que:

(5) $p . (r . x) = (p\ r) . x$; p y r en R, x en X,

(6) $1 . x = x$ para todo vector x,

(7) $r . (x + y) = r . x + r . y$; r en R, x, y en X,

(8) $(p + r) . x = p . x + r . x$; p y r en R, x en X.

Cuando vayamos a definir las operaciones suma de vectores y producto de un vector por un número real en un conjunto específico lo haremos de una manera conveniente si queremos obtener un espacio vectorial. Luego, aunque utilicemos los símbolos tradicionales de suma y multiplicación en cada caso tendrán un significado diferente.

Para probar que los segmentos dirigidos de la Física son un caso particular de vectores, basta verificar que cumplen con las propiedades enunciadas más arriba, siendo la operación (+) la suma de segmentos dirigidos y la operación (.) la multiplicación de un segmento dirigido por un número real.

Muchas de las estructuras con que ha trabajado el lector en matemática, son espacios vectoriales. Veamos algunos ejemplos. El conjunto de los números reales

R y el conjunto de los números complejos son espacios vectoriales sobre R, demostrar esta afirmación es fácil, ya que solamente se tiene que probar que las operaciones de suma y multiplicación definidas en R y C satisfacen las condiciones (1) - (8).

En R^n consideremos las operaciones (+) y (.) definidas a continuación:

i) $(x_1,\ldots, x_n) + (y_1,\ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

ii) $r \cdot (x_1,\ldots, x_n) = (r\, x_1,\ldots, r\, x_n)$

donde x_i está en R, y_i está en R ($i = 1, \ldots, n$), r en R.

Notemos que estas operaciones de suma y multiplicación están bien definidas, ya que se definen a partir de la suma y multiplicación de los números reales. Es un fácil ejercicio comprobar que R^n junto con las operaciones de suma y multiplicación definidas anteriormente constituye un espacio vectorial.

En el conjunto C (I) definamos las operaciones (+) y (.) como sigue:

i) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

ii) $(r \cdot f)(x) = r\, f(x)$

para toda x en el intervalo $\langle a,b \rangle$, f, g en C (I), r en R. Estas operaciones tienen sentido, ya que la suma y producto de funciones continuas son funciones continuas. Nótese que la definición de suma de funciones y la multiplicación de una función por un número real han sido formuladas de tal manera que la estructura vectorial del rango de las funciones induzca dicha estructura en el espacio C (I). Dejamos al lector la demostración de que las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en C (I) satisfacen todas las condiciones (1) - (8), es decir, C (I) es un espacio vectorial.

III. ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS

Sea $(X, +, .)$ un espacio vectorial. Una función $||x||$ de X a los números reales no negativos es una norma si, y sólo si:

(i) $||x|| = 0$ implica que $x = \theta$,

(ii) $||\theta|| = 0$,

(iii) $||r . x|| = |r| \; ||x||$, r en R y x en X,

(iv) $||r + y|| \leq ||x|| + ||y||$, para toda x,y en X.

Llamaremos espacio vectorial normado a un espacio vectorial dotado de una norma. Aunque utilicemos el mismo símbolo $|| \; ||$ para denotar la norma en distintos espacios normados esta función será definida de manera diferente en cada uno de ellos. Es fácil comprobar que R es un espacio vectorial normado cuya norma es la función valor absoluto $| \; |$.

En el espacio R^n consideremos la función $|| \; ||$ definida por la fórmula

$||(x_1,\ldots,x_n)|| = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$, x_i en R $(i = 1,\ldots n)$.

Utilizando las propiedades de la función valor absoluto $| \; |$ el lector podrá probar que la función $|| \; ||$ es una norma. Nótese que la función $|| \; ||$ está bien definida porque se define a partir de la función $| \; |$ y de la operación $+$ definidas ambas en R. Más aún, la función $|| \; ||$ hereda de la función valor absoluto las propiedades que caracterizan a una norma.

Para toda función f en $C(I)$ definamos la función $||f||$ como el valor máximo o supremum de la expresión $|f(x)|$ en el intervalo I, es decir, $||f|| = \sup \{|f(x)| : x \text{ en } I\}$.

La función $|| \; ||$ está bien definida en el espacio $C(I)$ porque toda función continua definida en un intervalo cerrado adquiere un valor máximo en dicho intervalo.

Procedamos a demostrar que la función $|| \ ||$ es una norma. Las propiedades (i), (ii) son fácilmente probadas, de manera que solamente demostraremos las propiedades (iii) y (iv). Notemos que $|r\, f(x)| = |r|\,|f(x)| \leq |r|\,||f||$ para toda x en el intervalo I implica que

$$(3.1) \quad ||r \cdot f|| \leq |r|\,||f||.$$

Por otra parte, si $r = 0$ es evidente que $|r|\,||f|| \leq ||r \cdot f||$. Si $r \neq 0$, entonces $|f(x)| \leq ||r \cdot f|| / |r|$ para toda x en el intervalo I, ya que $|f(x)| = |r|\,|f(x)| / |r| = \dfrac{|r\, f(x)|}{|r|}$ para toda x en el intervalo I. Luego, $||f|| \leq ||r \cdot f|| / |r|$. Por lo tanto, hemos probado que:

$$(3.2) \quad |r|\,||f|| \leq ||r \cdot f||.$$

De las expresiones (3.1) y (3.2) concluimos que

$$||r \cdot f|| = |r|\,||f||.$$

Finalmente,

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \text{ para toda x en I. Pe-}$$

ro

$$|f(x)| \leq ||f||$$

$$|g(x)| \leq ||g||$$

para toda x en I. Luego,

$$|(f + g)(x)| \leq ||f|| + ||g||$$

para toda x en I. De esta última expresión se sigue que

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||.$$

Ha quedado demostrado que la función $|| \ ||$ es una norma en el espacio C (I).

El lector debe notar que en la demostración de la propiedad (iii) que hicimos más arriba, el punto esencial era probar que

$\sup \{|r\, f(x)| : x \text{ en } I\} = \sup \{|r|\, |f(x)| : x \text{ en } I\} =$

$= |r| \sup \{|f(x)| : x \text{ en } I\}$.

Concluimos esta sección afirmando que los espacios R, R^n y C (I) son espacios vectoriales normados.

IV. CONVERGENCIA EN UN ESPACIO NORMADO

Sea $(X, || \; ||)$ un espacio vectorial normado y x_n una sucesión de elementos en X. Decimos que la sucesión x_n converge hacia x, x en X, si y sólo si, la sucesión de números reales $||x_n - x||$ converge hacia 0 cuando n tiende a infinito. En otras palabras, x_n converge hacia x, si y sólo si, para todo número real positivo ε dado existe un número real positivo N tal que:

$$||x_n - x|| < \varepsilon \text{ para toda } n \geq N.$$

La presencia de una norma nos ha permitido introducir la noción de convergencia, la cual es un concepto topológico. Por lo tanto, en un espacio vectorial normado se conjugan estructuras algebraicas y topológicas.

V. ESPACIOS DE BANACH

Un espacio normado $(X, || \; ||)$ es un espacio de Banach si se cumple que para toda sucesión x_n de elementos en X tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ es convergente, existe un elemento x en X con la propiedad

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n. \tag{5.1}$$

La convergencia de una serie en un espacio de Banach se define a partir de la convergencia de la sucesión de sumas parciales como se hace con series de números reales. Pruebe el lector que el elemento x que satisface (5.1) es único.

En el Cálculo aprendimos que si una serie converge absolutamente, entonces la serie es convergente. Es decir, si la sucesión x_n de números reales es tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge, entonces existe un número real x tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Luego, el espacio $(R, |\ |)$ es un espacio de Banach.

Sea $y_m = (x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(n)})$ una sucesión de elementos en R^n tal que $\sum_{m=1}^{\infty} ||y_m||$ es convergente. Notemos que para cualquier m se cumple $|x_i^{(m)}| \leq |x_1^{(m)}| + \ldots + |x_n^{(m)}| = ||y_m||$ $(i = 1, \ldots, n)$. Luego, $\sum_{m=1}^{\infty} | x_i^{(m)}|$ es convergente para $i = 1, \ldots, n$, porque $\sum_{m=1}^{\infty} ||y_m||$ es convergente. Por lo tanto, existe x_i tal que

$$(5.2) \qquad x_i = \sum_{m=1}^{\infty} x_i^{(m)} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Denotemos por y al elemento $(x_1, \ldots, x_n)$ en R^n y notemos que

$$||y - \sum_{m=1}^{k} y_m || = || (x_1 - \sum_{m=1}^{k} x_1^{(m)}, \ldots, x_n - \sum_{m=1}^{k} x_n^{(m)}) || =$$

$= |x_1 - \sum_{m=1}^{k} x_1^{(m)}| + \ldots + | x_n - \sum_{m=1}^{k} x_n^{(m)}| \to 0$ cuando k tiende a infinito en virtud de la ecuación (5.2). Luego, existe un elemento y en R^n tal que $y = \sum_{m=1}^{\infty} y_m$, es decir, $(R^n, ||\ ||)$ es un espacio de Banach.

Tomemos una sucesión f_n en C (I) tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||$ sea convergente. Sea x un punto arbitrario en el intervalo I. Luego, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ es convergente, porque $|f_n(x)| \leq ||f_n||$ para cualquier número natural n. Denotemos por f(x) al número real $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Como el punto x en el intervalo I fue seleccionado arbitrariamente, la expresión $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ define una función cuyo dominio es el intervalo I. Vamos a probar que la función f es continua. Para cualquier x en el intervalo I y para m > n se cumple que

$| S_m(x) - S_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} ||f_k|| \to 0$ cuando n tiende a infinito, donde $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$.

Luego, las funciones S_n convergen uniformemente hacia la función f en el intervalo I ya que S_n es uniformemente una sucesión de Cauchy en I. Por lo tanto, f es una función continua en el intervalo I porque es el límite de una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente en el intervalo I. Hemos demostrado que el espacio $(C(I), || \ ||)$ es un espacio de Banach, ya que dada una sucesión f_n en C (I) tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n||$ sea convergente, existe una función f en C (I) que satisface la ecuación $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ en el intervalo I.

VI. CONJUNTOS CERRADOS EN UN ESPACIO DE BANACH

Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto de X. Decimos que A es un conjunto cerrado en X si para toda sucesión x_n de elementos en A que converge hacia un punto x en X se cumple que el punto x pertenece al conjunto A.

Tomemos una sucesión x_n de números reales no negativos tal que dicha sucesión converja hacia un número real x. Si x es negativo, entonces existe un número real N tal que $|x_n - x| < -x$ para toda $n \geq N$. Luego, $x_n < 0$ para toda $n \geq N$. Esta última proposición contradice el hecho que x_n es un número real no negativo para cualquier número natural n. Por lo tanto, concluimos que x es un número real no negativo. En otras palabras, el conjunto de los números reales no negativos R_1 es un conjunto cerrado en R.

De la definición de subconjunto cerrado de X se sigue evidentemente que X es un subconjunto cerrado de X.

VII. PUNTOS FIJOS EN UN ESPACIO DE BANACH

Sea F una función de X en X donde X es un espacio de Banach.

Definición 7.1. F es una función de contradicción si:

$$||F(x) - F(y)|| \leq K \ ||x - y||$$

donde $0 < k < 1$, x,y son puntos arbitrarios en X.

Definición 7.2. Un punto x en X es un punto fijo de la función F si se cumple que $F(x) = x$.

No toda función tiene puntos fijos. La función $f(x) = x + 1$, x un número real no tiene puntos fijos.

Sea F_1 una función de R_1 definida por la fórmula $F_1(x) = \sqrt{2 + x}$. Nótese que F_1 está definida para cualquier x en R_1 y que los valores de la función F_1 son puntos en R_1. Si existe x en R_1 tal que

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$$

entonces,

$$x = \sqrt{2 + x}$$

es decir, x es un punto fijo de la función F_1. Por otra parte, si x es un punto fijo de la función F_1 entonces:

$$x = \sqrt{2 + x}$$

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}$$

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + x}}}$$

y así sucesivamente, es decir,

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$$

Luego, el problema 1.1 es equivalente a la determinación de la existencia de un punto fijo único de la función F_1.

Sea F_2 una función de R^2 en R^2 definida por la fórmula

$$F_2\ (x,y) = 1/3\ \ (\cos y - \operatorname{sen} x + a,\ \cos x + \operatorname{sen} y + b)$$

El lector puede convencerse que resolver el problema 1.2 es equivalente a determinar la existencia de un punto fijo único de la función F_2.

Sea F_3 una función de C (I) en C (I) tal que

$$(F_3 y)(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t))\, dt \text{ para toda } x \text{ en } I.$$

Supongamos que y es una solución del problema 1.3. Luego, f(x, y(x)) es una función continua definida en I porque la composición de funciones continuas es una función continua. Por lo tanto, y' es una función continua en I. La continuidad de las funciones y', f(x, y(x)) en I nos permite escribir:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ implica que } \int_a^x y'(t)\, dt = \int_a^x f(t, y(t))\, dt.$$

Es decir, $$y(t) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t))\, dt.$$

Podemos concluir que si y es una solución del problema 1.3, entonces y es un punto fijo de la función F_3. Por otra parte, si y es un punto fijo de F_3, entonces,

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(t, y(t))\, dt \text{ para toda } x \text{ en } I.$$

La continuidad de las funciones f, y garantiza la continuidad de la función f(t, y(t)) en I y por lo tanto, la existencia de la derivada en I de la función

$$\int_a^x f(t, y(t))\, dt.$$

Luego, la función y satisface las condiciones:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ en el intervalo } I,$$

$$y(a) = y_0.$$

En otras palabras, hemos demostrado que cualquier punto fijo de la función F_3 es una solución al problema 1.3. Hemos establecido que resolver el problema 1.3

es equivalente a determinar la existencia de puntos fijos de la función F_3.

Ya hemos cumplido a cabalidad la promesa hecha al lector en la introducción de este artículo. Ahora bien, con el fin de recalcar la validez de las afirmaciones hechas en la introducción, vamos a probar que los operadores F_1, F_2, F_3 tienen un punto fijo único utilizando el teorema del punto fijo de Banach, el cual enunciamos a continuación.

<u>Teorema 7.1</u> Si X es un espacio de Banach, A es un subconjunto cerrado de X, y F es una función de contradicción de A en A, entonces F tiene un punto fijo único.

La demostración del teorema de Banach la haremos en la sección final de este artículo. Para terminar esta sección vamos a probar que F_1, F_2, F_3 son funciones de contracción. Del teorema de Banach se seguirá, por tanto, que los problemas 1.1, 1.2, 1.3 tienen solución única.

<u>Proposición 7.1</u> La función F_1 es una función de contracción.

Demostración: Usando el teorema del valor medio y suponiendo que $y > x$ tenemos:

$$| F_1(x) - F_1(y)| = | \sqrt{2 + x} - \sqrt{2 + y}| = (1/2\sqrt{2 + c}) \; | x - y| \leq (1/2\sqrt{2}) |x -$$

donde $x < c < y$. Como $1/2 \quad 2 < 1$ queda demostrado que F_1 es una función de contracción.

<u>Proposición 7.2</u> La función F_2 es una función de contracción.

Demostración: Por el teorema del valor medio podemos escribir

$$||F_2(x,y) - F_2(u,v)|| = 1/3 \; |(\cos y - \cos v) + (\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} x)| + 1/3 \; |(\cos x$$

$$- \cos u) + (\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} v)| \leq 1/3 \; |\cos y - \cos v| + 1/3 \; |\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} x| + 1/3$$

$$|\cos x - \cos u| + 1/3 |\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} v| \leq 1/3 \; |\operatorname{sen} c_1| \; |y - v| + 1/3 \; |\cos c_2| \; | x - u|$$

$$+ 1/3 \; |\operatorname{sen} c_3| \; |x - u| + 1/3 \; |\cos c_4| \; |y - v| \; ,$$

donde c_1 y c_4 son puntos entre y, v, y los puntos c_2 y c_3 son puntos entre x, y.

Por lo tanto,

$$||F_2(x,y) - F_2(u,v)|| \leq 2/3\ (|x - u| + |y - v|) = 2/3||(x,y) - (u,v)||$$

porque $|\text{sen } x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$ para cualquier número real x.

Definición 7.3 Una función f de I x R en R satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable si existe un número real L tal que

$$|f(x,y) - f(x,u)| \leq L\ |y - u|$$

para toda x en I, y,u en R.

Proposición 7.3 Si f es una función continua que satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable con constante L tal que $L(b - a) < 1$, entonces F_3 es una función de contracción.

Demostración: A partir de la definición de la función F_3 y de las propiedades de la integral de Riemman y de la función f tenemos que

$$|F_3\, y(x) - F_3\, z(x)| = \int_a^x f(t, y(t))\, dt - \int_a^x f(t, z(t))\, dt| =$$

$$= |\int_a^x (f(t, y(t)) - f(t, z(t))\, dt| \leq \int_a^x |f(t, y(t)) - f(t, z(t))| \leq dt$$

$$\leq \int_a^x L\ |y(t) - z(t)|\ dt \leq \int_a^b L\ ||y - z||\ dt = L\ (b - a)\ ||y - z||.$$

Por lo tanto, $||F_3\ (y) - F_3\ (z)|| \leq L\ (b - a)\ ||y - z||$. Luego, la proposición ha sido demostrada.

VIII. TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BANACH

En esta última sección vamos a demostrar el Teorema 7.1. Sea A un subconjunto cerrado del espacio de Banach X y F una función de contracción de A en A cuya constante de contradicción es K. Tomemos un punto cualquiera S_0 en A y construyamos la sucesión S_n de elementos en A como sigue:

$$S_1 = F(S_0),\ S_2 = F(S_1),\ \ldots\ S_n = F(S_{n-1}), \ldots$$

Usando la sucesión S_n construyamos una nueva sucesión x_n de elementos en X de la manera siguiente:

$$x_0 = S_0,\ x_1 = S_1 - S_0,\ x_2 = S_2 - S_1, \ldots,\ x_n = S_n - S_{n-1}, \ldots$$

Notemos que x_n es un elemento en X porque X es un espacio lineal, además, $x_0 + \ldots + x_n = S_n$ para todo número natural n.

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$. Los términos de esta serie satisfacen la propiedad siguiente:

$$||x_1|| = ||S_1 - S_0|| = d,\ x_2 = ||S_2 - S_1|| = ||F(S_1) - F(S_c)|| \leq$$
$$\leq K\ ||S_1 - S_0|| = Kd,\ x_3 = ||S_3 - S_2|| = ||F(S_2) - F(S_1)|| \leq$$
$$\leq K\ ||S_2 - S_1|| \leq K^2 d,\ \ldots\ ||x_n|| \leq K^{n-1} d,\ \ldots$$

Luego, $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ es convergente, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} K^{n-1}d$ es una serie geométrica convergente porque $0 < K < 1$.

Por lo tanto, existe x en X tal que $||x - (x + \ldots + x_n)|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir, $||x - S_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pero como A es cerrado se tiene que $x \in A$. Finalmente,

$$0 \leq ||x - F(x)|| \leq ||x - S_n|| + ||S_n - S_{n+1}|| + ||S_{n+1} - F(x)|| \leq$$
$$\leq ||x - S_n|| + ||S_n - S_{n+1}|| + ||F(S_n) - F(x)|| \leq$$
$$\leq ||x - S_n|| + K^n\ d + K\ ||S_n - x|| \to 0$$

cuando $n \to \infty$ porque $0 < K < 1$. Luego, $||x - F(x)|| = 0$, es decir $F(x) = x$.

Hemos probado la existencia de un punto fijo aunque no su unicidad. Es interesante hacer resaltar que al mismo tiempo se ha indicado la forma de obtener este punto fijo.

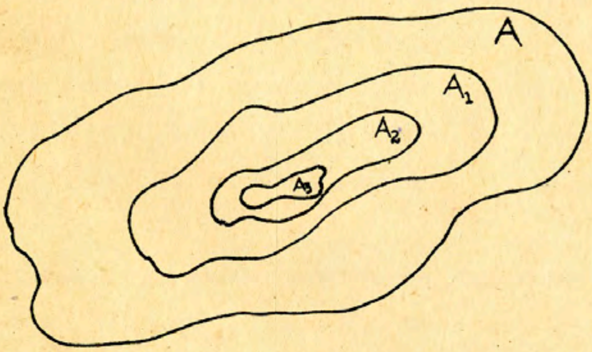
Finalmente vamos a demostrar que el punto fijo x determinado anteriormente es único. Supongamos que existe y en A, $y \neq x$, tal que $F(y) = y$.

Tendríamos entonces,

$$||x - y|| = ||F(x) - F(y)|| \leq K\,||x - y|| < ||x - y|| \text{ porque } 0 < K < 1.$$

Pero como es imposible que $||x - y|| < ||x - y||$ concluimos que el punto fijo x es único, con lo cual queda demostrado el teorema de Banach.

Antes de terminar deseo que el lector se percate del contenido geométrico del teorema de Banach. Supongamos que podemos representar gráficamente el conjunto A como se hace en la figura dada a continuación.



Como F es una función de contracción de A en A, el conjunto $A_1 = F(A)$ estará contenido en A. Igualmente, $A_2 = F(A_1)$ estará contenido en A_1 y así sucesivamente. Por lo tanto, si continuamos este proceso indefinidamente obtendremos un punto x en A tal que $F(x) = x$.

BIBLIOGRAFIA

BANACH, S. Theorie des Opérations Lineaires (Monografje Matematyazne, Vol. I). Warsaw, 1932.

DIEUDONNE, J. Foundations of Modern Analysis. Academic Press, N.Y., 1960.

DUNFORDS, N., and J. SCHWARTZ. Linear Operators. New York, Interscience, 1958.

HALMOS, P. R. Finite Dimensional Vector Spaces. D. Van Nostrand Company Inc., London, 1958.

HILLE, E. and R. PHILLIPS. Functional Analysis and Semi-Groups (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 31), Providence, 1957.

LOOMIS, L. H. Introduction to Abstract Harmonic Analysis, D. Van Nostrand Company Inc., Princeton, N.Y., 1953.

NAIMARK, M.A., Normed Rings. Hafner Publishing Company, Inc. New York, 1964.

ROYDEN, H.L. Real Analysis. The Macmillan Company, London, 1969.